ÜBER DIE

GEOMETRIE DER KEGELSCHNITTE,

INSBESONDERE DEREN

CHARAKTERISTIKENPROBLEM.

HABILITATIONSSCHRIFT,

DURCH WELCHE

MIT ZUSTIMMUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZU SEINER

DIENSTAG, DEN 27. OCTOBER, NACHMITTAGS 5 UHR

IM

AUDITORIUM DES CZERMAK'SCHEN INSTITUTES

ABZUHALTENDEN, DAS THEMA:

„ÜBER DIE RATIONALEN CURVEN"

BEHANDELNDEN

PROBEVORLESUNG

ERGEBENST EINLADET

Dr. EDUARD STUDY.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1885.

Inhalt.

Seite

I. Geschichtliches über das Charakteristikenproblem der Kegelschnitte . . 1
II. Ueber eine neue Formulirung des Problems. 7
III. Ueber die Geometrie der Systeme algebraischer Formen 11

1. Das Charakteristikenproblem 16
2. Das Charakteristikenproblem der ternären quadratischen Formen 18
3. Die doppelte Parameterdarstellung der Kegelschnitte einer Ebene . . . 19
4. Die Mannichfaltigkeit der ausgearteten Kegelschnitte und die quadratische Transformation T, welche einer Curve 2. Ordnung die von ihren Tangenten umhüllte Curve 2. Classe zuordnet 22
5. Das Unbestimmtwerden dieser Transformation T 26
6. Einfach- und vierfach ausgedehnte Mannichfaltigkeiten, welche einander in dieser Transformation entsprechen. Die „Charakteristiken" der durch dieselben dargestellten Kegelschnittsysteme 28
7. Das Unbestimmtwerden der Transformation T für Elemente vierfach ausgedehnter Mannichfaltigkeiten 31
8. Der Chasles'sche Satz 35
9. Der erweiterte Chasles'sche Satz und die Halphen'sche Symbolik 36
10. Die Beweglichkeit der Lösungen des Charakteristikenproblems. Beispiel 40

Anhang: Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel 45

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545809_0044

Bei der grundlegenden Bedeutung, welche das Bézout'sche Theorem für die meisten geometrischen Untersuchungen besitzt, war es natürlich, dass die Geometer, sobald sie überhaupt anfingen, neben den früher allein untersuchten Curven und Oberflächen auch zusammengesetztere Gebilde in den Kreis ihrer Betrachtung zu ziehen, danach strebten, jenes mächtige Werkzeug auf das neu erschlossene Arbeitsfeld mit sich zu nehmen, also den Bézout'schen Satz auf jene Gebilde auszudehnen, beziehungsweise sein Analogon aufzusuchen.

Eine der ersten und wichtigsten Verallgemeinerungen, welche so die Bézout'sche Fragestellung erfuhr, bezog sich auf *Systeme von Curven und Oberflächen.*

Es war, allgemein zu reden, das Problem: „*Diejenigen Curven oder Flächen eines (algebraischen) Systems solcher Gebilde anzugeben, welche gegebenen Bedingungen genügen*"; oder, mit anderen Worten: „*Mehrere in ihren Dimensionen einander auf geeignete Weise ergänzende Systeme von Curven oder Flächen gleicher Art zum Durchschnitt zu bringen*", d. h. die Gleichung anzugeben, von deren Lösung die Auffindung derselben in letzter Instanz abhängt, oder doch wenigstens den Grad der Gleichung, die Anzahl der Lösungen oder die Ordnung des Lösungssystems zu bestimmen.

Der erste, welcher die letztere Aufgabe — in der es sich also lediglich um eine Erweiterung der Bezout'schen Sätze handelte — in ihrer Allgemeinheit angriff, oder doch wenigstens anzugreifen glaubte, war de Jonquières.

Seine Beantwortung der Frage bezog sich allerdings nur auf einen besonderen Fall — den er noch für den allgemeinen ansah —, man

kann ihr aber, mit Bezugnahme auf eine der Folgezeit geläufig gewordene Anschauungsweise, einen generellen Ausdruck geben, dahin lautend, *dass diese erweiterte Aufgabe noch in das Gebiet des Bézout'schen Theorems selbst fällt.*

Da nämlich beispielsweise alle ebenen Curven n^{ter} Ordnung eine lineare Mannichfaltigkeit bilden, und man diese auf eine lineare Punktmannichfaltigkeit ein-eindeutig beziehen kann, so ist die Frage ohne Weiteres auf Bézout's originale Problemstellung zurückführbar.

Mit Rücksicht auf die vorhergenannte Aufgabe wird also, zufolge der ursprünglichen Auffassung de Jonquières', jedes System von Curven derselben Ordnung in der Ebene durch *eine einzige* Zahl charakterisirt, den „*Index*" des Systems, welcher der Ordnung etwa einer Raumcurve oder einer Fläche analog ist; und man erhält die Anzahl der mehreren Systemen von geeigneten Dimensionen gemeinsamen Curven, indem man das Product ihrer Indices bildet.

Dieser Standpunkt zeigt nun offenbar den Bézout'schen Sätzen gegenüber nichts eigentlich Neues; die Theorie der Systeme algebraischer Curven selbst aber lässt er in einem falschen Lichte erscheinen, wie man schon daraus erkennen kann, dass man von hier zu Unterscheidungen gelangt, die in der Natur jener Gebilde nicht begründet sind.

Es beruht dies auf der Auszeichnung des Punktes als Raumelement. Eine Curve ist aber nicht allein Ort von Punkten; und man wird etwa ein Kegelschnittsystem nicht nur als ein System von Curven zweiter *Ordnung*, also von Punktcurven betrachten dürfen, sondern man wird dasselbe ebensowohl als ein System von Curven zweiter *Classe* aufzufassen haben, d. h. als ein System von Oertern für gerade Linien.

Ein und dasselbe Gebilde erhält aber in beiden Fällen verschiedene analytische Darstellungen und zugleich verschiedene Indices; man muss daher, wenn man sich nicht in Widersprüche verwickeln will, beide Standpunkte streng auseinanderhalten*), wozu im Begriffe des Kegelschnittes kein Grund liegen kann.

Es bedeutete mithin einen grossen Fortschritt in dieser Theorie, als Chasles gegen de Jonquières geltend machte, dass von der Gesammtzahl jener Lösungen gewisse in Abzug zu bringen seien, welche

*) Während man nämlich zuerst zwei Curven als identisch ansah, wenn sie Punkt für Punkt übereinstimmten, hat man sie jetzt als identisch zu betrachten, wenn ihre Tangenten dieselben sind. Das eine ist aber nicht immer eine Folge des anderen, nämlich bei ausgearteten Curven nicht; und dadurch eben unterscheiden sich jene beiden Auffassungsweisen, dass man in jedem Falle *andere* ausgeartete Curven noch mit zu dem System rechnet. In beiden Fällen begeht man offenbar einen Act der Willkür; ihn zu vermeiden, ohne — wie es geschehen ist — in einen ähnlichen Fehler zu verfallen, ist das punctum saliens bei diesem Problem.

den Bedingungen der Aufgabe zwar *selbstverständlich, aber doch nicht eigentlich* genügten**).

Suchte man nämlich beispielsweise die Zahl der Curven 2. O. eines einfach ausgedehnten Systems, welche eine beliebig gegebene Curve berühren, so erhielt man, wenn sich doppelt zählende Gerade unter den Kegelschnitten des Systems befanden, dieselben immer mit als Lösungen der Aufgabe.

Diese ausgearteten Kegelschnitte erfüllten aber die Bedingungen des Problems offenbar in ganz anderer Weise als die übrigen, im Allgemeinen nicht ausgearteten Kegelschnitte der Reihe, welche jene Curve berühren im gewöhnlichen Sinne des Wortes, und waren daher, da man sich nur für die letzteren interessirte, nicht mitzuzählen.

So gewendet, war die Frage nun nicht mehr so leicht allgemein zu behandeln, wie in der früheren Fassung; doch hatte Chasles die Antwort wenigstens für Systeme von Kegelschnitten einer und derselben Ebene durch *Induction* gefunden: Er stellte den Satz auf, *dass die Zahl der Kegelschnitte, in welchen sich ein einfach- und ein vierfach-ausgedehntes System durchdringen, durch einen Ausdruck von der Form*

$$\alpha\mu + \beta\nu$$

angegeben werde, worin α, β, μ, ν *Zahlen sind, von welchen* μ *und* ν *für das erste System „charakteristisch" und von dem zweiten ganz unabhängig sind, während für* α *und* β *das Umgekehrte gilt.*

Aus dieser Formel leitete Chasles noch eine zweite ab, welche die Zahl der Kegelschnitte, in welchen sich fünf beliebige, vierfach ausgedehnte Systeme treffen, als eine lineare Funktion der beiden *„Charakteristiken"* α, β eines jeden derselben angab, und Cremona fügte der Chasles'schen eine ähnlich gebaute Formel hinzu, welche sich auf die Gegenüberstellung eines zweifach und eines dreifach ausgedehnten Systems bezog, die nun nicht mehr Durchschnitte von drei, bezüglich zwei vierfach ausgedehnten Systemen zu sein brauchten. (Alles dieses in den Comptes Rendus des Jahres 1864.)

Obwohl nun diese Sätze um ihrer merkwürdigen Form, ihrer Allgemeinheit und grossen Fruchtbarkeit willen das lebhafteste Interesse der Geometer erregten, und man dieselben nicht allein in zahlreichen Beispielen bestätigt fand (besonders bei Berührungsaufgaben), sondern auch — freilich nur mit sehr beschränktem Erfolg — den Versuch machte, dieselben auf höhere Gebilde auszudehnen, so erschien doch erst nach Verlauf von fast einem Decennium eine Abhandlung, welche die *Allgemeingiltigkeit* wenigstens *des Chasles'schen*

**) Ich drücke mich mit Absicht so unbestimmt aus, da — was zu bemerken für das Folgende wesentlich ist — scharfe Definitionen damals in der That nicht gegeben wurden.

Satzes zu beweisen unternahm, aus der Feder von Clebsch (Math. Annalen Bd. 6 (1873) S. 1), worauf dann bald mehrere andere Beweisversuche folgten.

Das Resultat dieser Untersuchung, die mit Hilfe der Methoden der Invariantentheorie geführt wurde, ist bekanntlich nicht richtig.

Da diese Einleitung natürlich nicht darauf ausgehen kann, die Entwickelung der umfangreichen, fast von Anfang an schon mit einem eigenen Namen bezeichneten „Theorie der Charakteristiken" genau zu verfolgen, sondern nur soviel aus derselben hervorheben will, als dem Verfasser zur Motivirung seiner eigenen Bestrebungen nothwendig erscheint, so ist hier nicht der Ort, die Leistungen Clebsch's und seiner Nachfolger zu zergliedern. Doch müssen wir einen Umstand näher in's Auge fassen, der von nun an immer deutlicher hervortritt, und für die Auslegung des Chasles'schen Satzes in der Folge massgebend geworden ist. Es vollzog sich nämlich, fast unmerklich, eine Verschiebung der ursprünglichen Problemstellung — so unmerklich, dass dieselbe sogar von ihren Urhebern nicht beachtet worden zu sein scheint.

Den entscheidenden Schritt in dieser Richtung that Clebsch in der eben erwähnten Abhandlung, indem er derselben einen Begriff der „eigentlichen Lösung" zu Grunde legte, der bis dahin noch nicht hervorgetreten war. Die Veranlassung hierzu gab die im Vergleich zu den früheren Arbeiten abstracte Natur seiner Untersuchung.

Wir haben schon angedeutet, dass die älteren Autoren sich bei ihrer Abscheidung gewisser Arten von Lösungen mehr durch einen richtigen Tact, als durch scharfe Begriffe hatten leiten lassen. Bei den von ihnen behandelten besonderen Classen von Aufgaben lehrte der Augenschein (s. obiges Beispiel), welche von den durch das Bézout'sche Theorem, resp. durch das sogenannte „Correspondenzprincip" gelieferten Lösungen zu entfernen, bezüglich als „eigentliche" beizubehalten waren; man wandte daher einer genauen, alle denkbaren Fälle umfassenden Definition dieser letzteren wenig Aufmerksamkeit zu, oder gab vielmehr gar keine Definition, da man kein Bedürfniss nach einer solchen empfand.

Will man aber eine in besonderen Fällen anschauungsmässig behandelte Aufgabe in voller Allgemeinheit erledigen, so muss man von der Anschauung zu Begriffen übergehen und logische Deductionen an Stelle der Berufung auf den Augenschein setzen, die nicht selten auch im einzelnen Falle, wo sie auszureichen scheint, doch nur das stille Bekenntniss enthält, dass man sich der wahren Gründe nicht vollkommen klar bewusst ist. Man hat zu diesem Behufe diejenigen Eigenschaften der betreffenden Gebilde, deren Vorhandensein man als die nothwendige und ausreichende Bedingung ansieht für das Bestehen jener

anderen Eigenschaften, welche den geometrischen Satz vorstellen, von den übrigen zu trennen, welche man als Consequenzen jener oder nur als durch die zufällige Erscheinungsform des allgemeinen Satzes bedingt betrachtet. Die ersteren muss man zum Range von Definitionen erheben und zur Grundlage der Beweisführung machen.

Diese Operation vollzieht Jeder, der eine Verallgemeinerung vornimmt, mit Absicht oder auch unwillkürlich. Da sie in der Hauptsache nur in der klareren Auffassung des für einen Satz Wesentlichen besteht, so ist zur Ausführung derselben nicht nothwendig, dass sie als ein Fortschritt des Gedankens in das Bewusstsein fällt. Es kann eintreten, dass der Schnitt, welcher Wesentliches von Zufälligem trennen soll, an der falschen Stelle geführt wird, und dass die angestrebte Schärfe der Definition doch nicht ganz erreicht wird.

Dies alles traf nun im vorliegenden Falle zu, wo es sich darum handeln musste, das „offenbar", zu analysiren, welchem zufolge nur gewisse Lösungen als eigentliche angesehen werden durften.

Es wird zwar bei Clebsch, wie bei seinen Nachfolgern der Chaslessche Satz immer noch in der alten Weise ausgesprochen: Es wird schlechthin von Kegelschnitten geredet, welche eine gegebene Bedingung erfüllen, und eine Definition für das Erfülltsein einer Bedingung wird dem Satze nicht vorangestellt, wiewohl eine solche hinsichtlich der ausgearteten Kegelschnitte nicht überflüssig ist.

Betrachten wir aber den Beweisgang jener Abhandlung, so sehen wir, dass ihr Verfasser ausschliesslich die *beweglichen* Curven als die eigentlichen Lösungen des Problems betrachtete, so dass wir also hier eine bestimmtere Auffassung des Satzes vor uns haben, als man dem Wortlaute nach vermuthen sollte.

Es bedarf dies noch einer kurzen Erläuterung.

Während in den bis dahin behandelten Classen von Aufgaben bei Zusammenstellung eines einfach und eines vierfach ausgedehnten Systems die „uneigentlichen" Lösungen ihren Ort in dem ersteren System unverändert beibehielten, wenn man die relative Lage beider Systeme durch collineare Transformation des einen änderte (vgl. wieder obiges Beispiel), hatten die anderen volle Beweglichkeit, was sich analytisch dadurch kundgab, dass die ersteren die das vierfach ausgedehnte System darstellende Bedingungsgleichung identisch befriedigten, die letzteren nicht.

Hierin erblickte Clebsch offenbar einen wesentlichen Unterschied beider Arten von Lösungen*) und dem entsprechend war seine Auf-

*) Den scheinbar näher liegenden Umstand, dass die uneigentlichen Lösungen ausgeartete Curven sind, für diese Unterscheidung zu benutzen, ging nicht an, da unter Umständen auch Lösungen ausarten können, die ganz sicher den Cha-

fassung des Chasles'schen Satzes. *Damit aber, dass der Begriff der eigentlichen Lösung* (ein Wort, das Clebsch übrigens nicht gebraucht) *ausschliesslich an die Beweglichkeit derselben geknüpft wurde, war dieser Satz selbst, wenn auch nicht dem Wortlaut, so doch dem Sinne nach schärfer als zuvor gefasst, gleichzeitig aber war etwas in die Formulirung der zu demselben führenden Problemstellung hineingetragen, das ursprünglich nicht darin gelegen hatte.*

Dass man aber hiermit nicht mehr genau den Chasles'schen Satz selbst vor sich hatte, sondern nur eine einseitige Ansicht desselben, neben der vielleicht auch noch andere denkbar sind, wurde übersehen. Dieser scheinbar geringfügige Umstand hat später dazu geführt, dass der Chasles'sche Satz als vollständig falsch bezeichnet worden ist.

Die nach Clebsch's Abhandlung erschienenen Untersuchungen können wir hier nur kurz berühren, da es uns nur auf die Auffassung der Problemstellung und des Chasles'schen Theorems ankommt, und die Folgezeit in dieser Richtung einen wesentlichen Fortschritt nicht gemacht hat. Es verharren diese Arbeiten nämlich entweder auf dem früheren Standpunkt — lassen also auch implicite keinen schärferen Begriff der eigentlichen Lösungen erkennen (was nicht auffallend erscheinen kann, da ein solcher auch bei Clebsch nur verdeckt eingeführt worden war), oder sie betrachten, wie die von Clebsch, nur die beweglichen Lösungen als die eigentlichen. In beiden Fällen war das Ergebniss die Formel von Chasles.

Herr Halphen hat das Verdienst, die in der letzterwähnten Richtung gewonnenen, Resultate — die einzigen ihm in exacter Formulirung vorliegenden — als unrichtig nachgewiesen und verbessert zu haben. Herr Halphen richtet zwar seine Angriffe gegen den Chasles'schen Satz im Allgemeinen, ohne einschränkenden Zusatz (zuerst in den Comptes Rendues vom 4. Sept. 1876), er hat aber offenbar nur die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte Fassung desselben im Auge. In der That zeigt sein Beispiel nur, *dass die Zahl der beweglichen, zwei Systemen erster und vierter Dimension gemeinsamen Curven unter Umständen kleiner sein kann, als die Chasles'sche Zahl.*

---

rakter von eigentlichen haben. — In seinem Beweise benutzt Clebsch ausser collinearen Aenderungen auch solche, welche wesentliche Constante des vierfach ausgedehnten Systems betreffen. Es kann nicht geleugnet werden, dass durch die auf nicht gerechtfertigten Voraussetzungen beruhende Hereinziehung solcher Aenderungen einige Unklarheit in den Begriff der Beweglichkeit bei Clebsch kommt. Wir dürfen aber, da die entgegengesetzte Annahme geradezu absurd ist, doch nicht zweifeln, dass Clebsch im Grunde nur die collinearen Aenderungen im Auge gehabt habe (wie denn auch die späteren Autoren nur solche in Betracht zogen), und haben also in der Herbeiziehung wesentlicher Constantenänderungen nur einen, in diesem Falle allerdings nicht unschädlichen Ueberfluss zu erblicken.

In späteren Aufsätzen gab Herr Halphen für die richtige Zahl der beweglichen Lösungen zwar keinen geschlossenen Ausdruck an, wie der Chasles'sche war (was überhaupt nicht möglich ist), aber doch ein einfaches Verfahren, dieselbe zu bestimmen. Die Chasles'sche Formel erwies sich also in diesem Sinne nicht als allgemeingiltig; doch gibt es, wie Herr Halphen gleichfalls zeigte, eine grosse Classe von Fällen, in denen dieselbe keiner Reduction bedürftig ist. (Journal de l'Ecole normale polytechnique. 1878. t. 45.)

Dies ist im Wesentlichen noch der gegenwärtige Standpunkt dieser Untersuchungen.

Es hatte also — wenn ich nun zusammenfassen darf — *Chasles erkannt, dass nicht alle von de Jonquières angegebenen Curven als eigentliche Lösungen der Aufgabe zu betrachten seien, zwei Systeme von Curven zum Durchschnitt zu bringen. Er hatte ferner einen Ausdruck für die Zahl dieser eigentlichen Lösungen in dem Falle aufgestellt, wo ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem einander gegenüberstehen, nicht aber zugleich eine hinreichende Definition derselben gegeben. Seit Clebsch wurde dann der von Chasles ausgesprochene Satz so aufgefasst, dass man als die in demselben beibehaltenen, eigentlichen Lösungen die beweglichen betrachtete. Herr Halphen hat gezeigt, dass der Ausdruck für die Zahl dieser letzteren Lösungen nicht allgemein die Chasles'sche Formel ist.*

Aus dem bisher Gesagten geht einerseits hervor, dass die Deutung des Chasles'schen Satzes, welche das Hauptgewicht auf die Beweglichkeit der Lösungen legte, keine glückliche war; andrerseits aber auch, dass die gegen diesen Satz gerichteten Angriffe im Grunde nicht ihn selbst, sondern eben nur jene besondere Auffassung treffen.

Man kann daher die Frage aufwerfen, ob man den Satz von Chasles nicht auf eine andere Art interpretiren kann, welche demselben eine ausnahmslos giltige Deutung verleiht.

Nachzuweisen, dass dem in der That so ist, ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit.

Die Veranlassung zur Entstehung derselben gab zum Theil die Bemerkung, dass die an die Beweglichkeit geknüpfte Definition der beizubehaltenden Lösungen eine *willkürliche* ist. Betrachtet man ja auch sonst in der Geometrie z. B. einen Schnittpunkt einer Curve und einer Oberfläche darum nicht weniger als einen Schnittpunkt, weil er etwa durch gewisse Bedingungen an einen gegebenen Punkt, oder eine feste Curve gebunden ist. *Dagegen ist es sonst allgemein üblich, eine*

*Gebilde, von dem es zweifelhaft sein kann, ob es zu einer gegebenen Mannichfaltigkeit gehört oder nicht, dann und nur dann zu derselben zu rechnen, wenn es sich (durch analytische Fortsetzung) aus unzweifelhaft dieser Mannichfaltigkeit angehörigen Gebilden stetig ableiten lässt.**)

Nähert man sich nun einem in eine Doppellinie ausgearteten Kegelschnitte in einer einfach ausgedehnten Kegelschnittreihe, so geht der Kegelschnitt, im Begriffe auszuarten, nicht schlechthin in jene Doppellinie über, sondern er plattet sich zuvor ab, und es entstehen auf der doppelt überdeckten Geraden zwei getrennte oder zusammenfallende Verzweigungspunkte. Erst mit diesen zusammen kann die ausgeartete Curve als ein vollständiger Kegelschnitt angesehen werden. Auf jeder doppelt überdeckten Geraden liegen aber ∞^2 Punktepaare, deren jedes mit ihr zusammen einen ausgearteten Kegelschnitt vorstellt; und von allen diesen Kegelschnitten werden wir, dem eben ausgesprochenen Princip gemäss, nur einen einzigen zu dem gegebenen System rechnen dürfen.

Dies ist auch die allgemein verbreitete Anschauung. Dass man aber dieselbe Betrachtung auch auf mehrfach ausgedehnte Kegelschnittsysteme anwenden müsse, scheint nicht anerkannt zu sein. Die Ursache dieser Inconsequenz glaube ich in Folgendem zu finden.

Es liege etwa ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem vor, welches eine Doppellinie enthält. Dann wird man sich dieser Doppellinie in dreifach unendlich vielen Fortschreitungsrichtungen (Kegelschnittbüscheln) nähern können, die in erster Annäherung dem gegebenen System angehören. Jede derselben führt durch Grenzübergang zu einem Punktepaar der Doppellinie, und man erhält auf diese Weise, da es nur ∞^2 solcher Punktepaare gibt, *im Allgemeinen* — so scheint es wenigstens — jedes Punktepaar noch unendlich oft.

Es erscheint also beinahe selbstverständlich, dass ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem zugleich mit einer Doppellinie alle Kegelschnitte enthält, die in Punktepaare dieser Geraden ausgeartet sind;

---

*) So allein nämlich erhält man allgemein giltige Sätze.

Man lässt z. B. eine Gerade, welche durch einen Doppelpunkt einer ebenen Curve geht, im Allgemeinen nicht als eine Tangente derselben gelten, weshalb man von der Erniedrigung der Classe einer Curve durch das Auftreten von Doppelpunkten spricht. Hat man dagegen in einer einfach ausgedehnten Reihe von Curven, unter welchen sich einzelne Curven mit Doppelpunkt befinden, diejenigen Curven zu bestimmen, welche eine gegebene Gerade berühren, und geht diese Gerade durch einen solchen isolirten Doppelpunkt, so wird man diesen Umstand als zufällig ansehen, und die zugehörige Curve sehr wohl als eine Berührungscurve der Geraden betrachten — nicht aber hinwiederum solche Curven, welche zu Doppelpunkten gehören, die in einer ganzen Reihe von Curven des Systems angehörenden Doppelpunkten liegen — Alles aus dem im Texte angegebenen Grunde.

es scheint die ganze Grenzbestimmung überflüssig zu sein, und was das Charakteristikenproblem anlangt, so scheint keine andere Formulirung desselben übrig zu bleiben, als die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte.

Es ist aber schon an einfachen Beispielen (worunter das schon mehrfach herbeigezogene System aller Kegelschnitte, welche eine gegebene Curve berühren) zu sehen, dass dies nicht richtig ist.

Man erhält vielmehr *gerade im allgemeinen Falle*, trotzdem man sich jener Doppellinie aus ∞^3 Richtungen nähern kann, doch nur ∞^1 verschiedene Grenzlagen.

Stellt man nun ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem zusammen, von welchen das erstere eine Doppellinie enthält, so wird diese im Allgemeinen auch in dem letzteren System enthalten sein; man erhält durch die bezüglichen Grenzübergänge im ersten Falle ein einziges Punktepaar auf der Geraden, im zweiten eine Reihe von ∞^1 solchen, unter welchen das erste im Allgemeinen sich nicht befindet. *Dieses Punktepaar wird man also nicht als eine beiden Systemen gemeinsame Curve ansehen dürfen.*

Bringt man nun die nach Abzug aller derartigen Vorkommnisse noch übrig bleibenden, nun beiden Systemen wirklich gemeinsamen Curven mit der richtigen Multiplicität in Anschlag, so wird ihre Gesammtzahl durch die Chasles'sche Formel angegeben — man erhält also eine ebenso einfache, als ungesuchte Deutung des Chasles'schen Satzes.*)

Die Bestimmung der Multiplicität einer Lösung im einzelnen Falle bedarf natürlich einer eingehenden Untersuchung.

Was nun die Durchführung der Untersuchung anlangt, so wäre es nicht schwierig gewesen, die hier entwickelten geometrischen Sätze ohne allen analytischen Apparat abzuleiten, unter blosser Zuhilfenahme des Bézout'schen Theorems und ausgehend von der geometrisch evidenten Thatsache, dass ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt ist, sobald er entweder als irreducible Curve oder als Punktepaar oder als Linienpaar gegeben vorliegt.

Ich habe es aber vorgezogen, die Aufgabe als einen Gegenstand der *Formentheorie* zu behandeln, *da, nachdem die früheren Versuche als gescheitert angesehen werden müssen, diese allein — nicht nur wegen des gegenwärtigen Zustandes der Wissenschaft, sondern auch aus inneren Gründen — die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Problems auf*

*) Es zeigt sich, dass diese Lösungen unter Umständen nur zum Theil beweglich sind. Die Angabe der Zahl dieser Curven, der „eigentlichen Lösungen" Clebsch's ist dann das, was Clebsch angestrebt und Herr Halphen ausgeführt hat. —

Formen von beliebig hoher Ordnung zeigt, es also wünschenswerth erscheinen muss, auch die quadratischen Formen bereits in dieses erweiterte Gesichtsfeld zu rücken.

Betrachtet man zwei algebraische Formen oder Systeme solcher als identisch, wenn sie in ihren sämmtlichen*) covarianten Bildungen übereinstimmen, wobei man sich diejenigen, welche für die vorliegenden besonderen Formen identisch verschwinden, als durch Grenzübergänge bestimmt denkt — wie dies im § 1 in etwas allgemeinerer Weise näher ausgeführt ist — so wird man eine zwei oder mehreren Systemen zugleich angehörige Form, bei welcher sich die Uebereinstimmung nicht auf alle covarianten Bildungen erstreckt, als jenen Systemen nicht *wirklich*, sondern höchstens *scheinbar* zugleich angehörig anzusehen haben — scheinbar nämlich, insofern man nur einen Theil der covarianten Bildungen im Auge hat.

Die Bestimmung der Zahl der beiden Systemen wirklich gemeinsamen Formen, bei welchen also alle covarianten Bildungen übereinstimmen, ist dann die Aufgabe, welche ich (im engeren Sinne, vgl. § 1) als das „*Charakteristikenproblem algebraischer Formen*“ bezeichnen zu dürfen glaube, da sie in dem besonderen Falle, der hier zur Behandlung kommt, ebenso wie die an die Beweglichkeit der Lösungen geknüpfte Problemstellung eine schärfere Fassung der von Chasles so bezeichneten Aufgabe vorstellt, und wirklich zu dem Resultate Chasles' hinführt.

Die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe, für deren Behandlung die des Charakteristikenproblems der quadratischen Formen ungeachtet der einfachen Structur ihres Formensystems als Prototyp gelten kann, geschieht, wenn wir von besonderen Classen von Systemen von Formen absehen, die bei Formen von höherer als der zweiten Ordnung zu wesentlich verwickelteren Aufgaben führen, in zwei Schritten:

Bei dem ersten handelt es sich um eine unmittelbare Verallgemeinerung des Bézout'schen Problems, von welcher jedoch immer nur besondere Fälle in Betracht kommen.

Der Inhalt der Fragestellungen dieser Art, deren Gesammtheit man vielleicht passend als das „Charakteristikenproblem der Punktmannichfaltigkeiten“ bezeichnen könnte, lässt sich etwa so ausdrücken:

„Mehrere derselben algebraischen Mannichfaltigkeit angehörende Punktmannichfaltigkeiten, deren Dimensionen einander in geeigneter Weise ergänzen, schneiden sich im Allgemeinen in einer endlichen Zahl von Punkten. Wie gross ist diese Zahl? und wie viele Schnitt-

*) Es ist nämlich in den höheren Fällen kein Grund mehr vorhanden, warum man in dieser Hinsicht einzelne Covarianten — wie etwa diejenige, welche die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten darstellt — vor den anderen auszeichnen soll.

punkte werden absorbirt, wenn jene Mannichfaltigkeiten im besonderen Falle unendlich viele Punkte gemein haben?"

Erst bei dem zweiten Schnitt tritt die Bedeutung in Kraft, welche man jenen Mannichfaltigkeiten, als von Systemen algebraischer Formen gebildet, beilegt: es kommt zu dem ersten Problem die der Theorie jener Systeme als einem besonderen Zweige der Algebra eigenthümliche Fragestellung hinzu:

„Wann eine gegebene Form mehreren Systemen wirklich, oder nur scheinbar zugleich angehört?"

Sind diese beiden Aufgaben in hinreichender Allgemeinheit erledigt, und damit auch das Charakteristikenproblem — was immer möglich sein muss, gleichviel, wie gross die Zahl der vorhandenen Invarianten ist —, so gesellt sich zu in ihnen besonderen Fällen ein drittes Problem: Die Frage nach der Gruppirung der erhaltenen Lösungen im einzelnen Falle. Hierher gehört dann vor Allem die Frage nach den Reductionen, welche die Beweglichkeit der Lösungen erleiden kann.

Bei Aufgaben der letzteren Art würde dann der ältere Begriff der „eigentlichen" Lösungen zur Geltung gelangen. Ich habe aber, um Missverständnissen vorzubeugen, dieses Wort ganz fallen lassen, spreche also nur von „scheinbaren" und „wirklichen" Lösungen, von welchen dann die letzteren weiterhin nach ihrer Beweglichkeit classificirt werden mögen.

Die hier gegebene Behandlung des Charakteristikenproblems der Kegelschnitte würde etwas kürzer ausgefallen sein, wenn wir uns, den Satz von Chasles als Ziel vor Augen, streng auf die Beibringung derjenigen Hilfsmittel beschränkt hätten, welche zur Erreichung desselben unbedingt nothwendig waren.

Es kann aber nicht der Zweck der Wissenschaft sein, irgend eine vereinzelte Wahrheit so kurz als möglich darzulegen: sie strebt vielmehr, ausgedehntere Gebiete, diese aber mit einer möglichst geringen Gesammtarbeit sich zu unterwerfen.

Daher sind bei der folgenden Untersuchung solche Sätze, welche nach meiner Meinung zu den elementaren Grundlagen einer jeden Theorie der Kegelschnittsysteme gehören, einer etwas ausführlicheren Behandlung unterzogen worden, als nöthig gewesen wäre, wenn dieselben als blosse Hilfssätze und Durchgangspunkte hätten dastehen sollen; so dass diese Darstellung, wie auch durch die Wahl des Titels angedeutet, vielleicht in der Hauptsache als eine auf die Geometrie der Kegelschnitte im Allgemeinen bezügliche Betrachtung anzusehen ist, von welcher eine Anwendung auf das Charakteristikenproblem gemacht wird.

Was nun die bei einer Untersuchung dieser Art anzuwendenden Methoden anlangt, so schien mir die principielle und ausschliessliche Anwendung der Processe des sogenannten symbolischen Rechnens vor den anderen Verfahrungsarten der analytischen Geometrie den Vorzug zu verdienen.

Denn diese Methode allein genügt, richtig aufgefasst — was in dieser ohnehin schon ungewöhnlich umfangreichen Einleitung allerdings nicht auseinandergesetzt werden kann — der gewiss berechtigten Forderung, zur Ableitung ihrer Wahrheiten keiner willkürlich eingeführten und daher überflüssigen Hilfsgrössen, wie Coordinaten sind, zu bedürfen*) — wiewohl eine flüchtige Betrachtung den entgegengesetzten Eindruck hervorbringen mag.

Indem dieselbe sich nur projectiver Prozesse bedient (deren jedem eine, aus der bisherigen Begründung dieser Theorie freilich nicht ersichtliche geometrische Bedeutung innewohnt), *und daher niemals in die Lage kommt, die invariante Natur ihrer Bildungen nachträglich beweisen zu müssen, vereinigt sie allein, so lange sie aus diesem Kreise von Operationen grundsätzlich niemals heraustritt, den Hauptvorzug der synthetischen Geometrie — nämlich keinen überflüssigen Schritt zu thun — mit dem Vortheil der analytischen Methode — der Darstellung der geometrischen Gebilde durch Gleichungen;* ja es lässt sich zeigen, dass ihr materieller Inhalt sich mit dem der synthetischen Geometrie deckt, soweit man letztere auf linear ausführbare Constructionen beschränkt; wobei sie aber vor der Schwesterdisciplin das voraus hat, dass sie allgemeine Methoden besitzt, deren Zulänglichkeit a priori bekannt ist, und dieselbe — was nicht gering anzuschlagen ist — durch die von vorn herein gegebene streng systematische Gruppierung des Stoffes übertrifft.

Ausserdem aber — und *dies allein würde hinreichen, die hohe Bedeutung dieser, von Seiten der eigentlichen Geometer, wie ich glaube, nicht hinreichend gewürdigten Methode darzuthun* — ist die principielle Anwendung jener invarianten Processe das einzige Mittel, welches die Gleichungen der geometrischen Gebilde in der denkbar allgemeinsten und zugleich einfachsten Form darzustellen im Stande ist, da sie nicht mehr als das Nothwendige und Wesentliche zum Ausdruck bringt. Die gewöhnlichen Methoden können eine ähnliche Einfachheit nur unter Verzichtleistung auf Allgemeinheit erreichen, nämlich durch

*) H. Grassmann's grossartige Schöpfung ist zwar auch frei von Coordinaten, ist dafür aber von dem Begriffe des Maasses wesentlich abhängig, und daher für die Zwecke der projectiven Geometrie, wiewohl allen anderen Methoden, ausser der symbolischen, überlegen, dennoch nicht die geeignete Methode. Das eigentliche Gebiet für die Anwendungen der Ausdehnungslehre ist die Mechanik, in der sie ja auch ihren Ursprung genommen hat.

Einführung specieller Coordinatensysteme, d. h. durch einen sachlich ganz unbegründeten Kunstgriff, und auch das nur in sehr einfachen Fällen.

Was die Bezeichnung jener Processe betrifft, so habe ich mich der in Deutschland üblichen „symbolischen" Schreibart angeschlossen, weil diese am leichtesten zu handhaben ist, wiewohl in theoretischer Hinsicht Cayley's, sowie besonders die aus Grassmann's Lückenausdrücken entspringende Bezeichnungsweise gewisse Vorzüge besitzen.

Eine Abweichung von der gebräuchlichen Darstellung habe ich mir nur insofern gestattet, als ich nicht, wie es gewöhnlich geschieht, Coordinaten etwa eines Punktes als Veränderliche ansehe, sondern im Sinne Grassmann's, diesen Punkt selbst; so dass, wenn in § 3 ein Punkt als „Parameter" einer Mannichfaltigkeit von fünf Dimensionen eingeführt wird, bei Anwendung der Coordinatenmethode die sechs homogenen Coordinaten dieses Punktes als eben so viele unabhängige (homogene) Parameter zu betrachten wären.

Die hier zu Grunde gelegte, in dieser Gestalt zuerst von Herrn Stroh („Zur Theorie der Combinanten", Math. Annalen Bd. XXII S. 393 u. ff.) benutzte Parameterdarstellung linearer Mannichfaltigkeiten von Formen derselben Ordnung ist übrigens nicht, wie es vielleicht den Anschein hat, als ein willkürlicher Kunstgriff, sondern nur als der naturgemässe Ausdruck der Thatsache anzusehen, dass diese Formen in doppelter Hinsicht Gegenstand der Betrachtung werden: im vorliegenden Falle erscheint der Kegelschnitt einmal als Ort von Punkten oder Linien in der Ebene — wobei also diese als veränderlich angesehen werden — das andere Mal als Element der ganzen, von allen Kegelschnitten der Ebene gebildeten Mannichfaltigkeit — wobei der Kegelschnitt selbst veränderlich gedacht wird.

Man hat das hiermit berührte Verhältniss bisher so dargestellt, dass man die Coefficienten der Gleichung des Kegelschnittes (ich bleibe bei dem concreten Falle, wiewohl die Sache natürlich allgemeine Geltung hat) unmittelbar als homogene Coordinaten eines Punktes im senären Gebiete (Raum von fünf Dimensionen) deutete. Gegen ein solches Verfahren, einen so bedeutenden Fortschritt seine erste Einführung auch repräsentiren mochte, ist aber u. A. einzuwenden, dass die rein projective Auffassung von *Coefficienten* einer Kegelschnittgleichung nichts weiss, dass bei seiner Anwendung die senär-invarianten Bildungen nicht, wie doch zu verlangen ist, auch formal als solche hervortreten, und dass es bei weitergehenden Untersuchungen bald genug die nöthige Einfachheit vermissen lässt — wie es denn überhaupt derselben Kritik unterliegt, wie der Gebrauch des Coordinatenrechnens im Allgemeinen.

Die doppelte Auffassung selbst aber ist bei Untersuchungen, wie

die vorliegende, kaum zu umgehen. Denn die sogenannte „*Abbildung auf die Punkte eines höheren Raumes*“, deren einfachster analytischer Ausdruck jene Parameterdarstellung ist, dient nicht allein wesentlich zur klareren Auffassung bekannter Dinge*), indem sie den wirklich vorhandenen Analogien mit Verhältnissen der gewöhnlichen Geometrie auch in der Form ihrer Sätze Rechnung trägt, sondern sie führt auch auf neue Wahrheiten, die zu entdecken auf anderem Wege sehr schwer gewesen sein würde, schon darum, weil ihre blosse Aussprache bei Verzichtleistung auf jene Analogie ausserordentlich verwickelt werden würde.**)

Es wäre daher, selbst auf dem Felde der rein synthetischen Methode, Pedanterie, wenn man aus metaphysischen Gründen, wie dem: „dass man sich höhere Räume nicht vorstellen könne, und mithin auch nicht von einer „Geometrie“ (als etwas wesentlich auf der Anschauung Beruhendem) in solchen Räumen sprechen dürfe“, auf solche Vortheile verzichten wollte, oder wenn man den an sich vollkommen berechtigten Satz dagegen in's Feld führen wollte, „dass man sich die Verhältnisse der ebenen Geometrie auch müsse klar machen können, ohne aus der Ebene hinauszutreten“ — da ja ein solches Hinaustreten lediglich in der Ausdrucksweise stattfindet, während die begrifflichen Operationen, für die man unnöthiger Weise neue Namen erfinden müsste, wollte man jenen Analogien aus dem Wege gehen, dadurch natürlich nicht geändert werden, dass man „Punkt“ statt „Kegelschnitt“ sagt.

*) Wie mannichfache Abwege würden nicht in der Charakteristikentheorie vermieden worden sein, wenn man von ihr einen ausgiebigeren Gebrauch hätte machen wollen!

**) Hierher gehören z. B. die meisten der Sätze, welche von der (hier mit T bezeichneten) quadratischen Transformation handeln, die in der Geometrie der Kegelschnitte eine ausgezeichnete Stellung einnimmt.

Hinsichtlich der Kegelschnitte wurde die in Rede stehende Abbildung zuerst von Cayley betrachtet („On the curves, which satisfy given conditions“ Phil. Trans. 1868 vol. 158), der jedoch die Doppelnatur derselben nicht hervorhob. Die Kenntniss des Umstandes, dass mit jener Abbildung der Curven n^{ter} Ordnung zugleich eine Abbildung der Curven n^{ter} Classe verbunden sei, verdanken wir vorzüglich den Untersuchungen der Herren Rosanes und Reye (s. besonders die Darstellung dieser Theorie bei H. Grassmann: „Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde“ in Crelle's Journal Bd. 84, S. 273).

Neuerdings wurde dieselbe Abbildung der Kegelschnitte einer Ebene auf geometrischem Wege mit grosser Ausführlichkeit untersucht von Herrn Veronese (Le superficie omaloide ecc. Atti della R. A. dei Lincei, serie 3ª, vol. XIX, 1884) und fast gleichzeitig von Herrn Segre („Considerazioni intorno alla geometria delle coniche“ ecc. Atti delle Scienze di Torino, vol. XX, 1885). Die geometrischen Resultate von § 3 und § 4 der vorliegenden Arbeit sind in jenen zumeist bereits enthalten.

Ich glaube sogar, nicht zu weit zu gehen, wenn ich in der Aufstellung und *zwiefachen* geometrischen Interpretation des vollständigen Formensystems der ternär-quadratischen, senär-linearen Form, welche jene Parameterdarstellung vermittelt, die Fundamentalaufgabe der Geometrie der Kegelschnitte erblicke.*)

Die Betrachtung derartiger Formen besitzt aber auch ein selbstständiges Interesse: Formen, die Veränderliche verschiedener von einander unabhängiger Gebiete enthalten, sind ebenso wie die Connexe Clebsch's als elementare *Grundgebilde* der Geometrie anzusehen; und zwar sind sie die allgemeinsten Objecte, welche den Methoden der Formentheorie unterworfen sind. Von geometrischer Seite haben sich einige derselben, besonders solche, welche mehrere Arten von Veränderlichen linear enthalten, und unter dem Namen der Systeme projectiver Erzeugungsarten von Curven oder Oberflächen bekannt sind, schon vor längerer Zeit der Betrachtung aufgedrängt, und sind neuerdings immer mehr in den Vordergrund getreten; auch lassen sich wohl eine Reihe von Untersuchungen, bei denen es weniger augenfällig ist, auf das Studium derartiger Formen zurückführen.

Die Algebra stellt dieselben von vorn herein als selbstständige Gebilde hin, welche, den Curven oder Flächen gleichwerthig, eine principielle Berücksichtigung verdienen, gleichgiltig ob sie zu bereits Bekanntem hinleiten, oder nicht. Sie eröffnen der Geometrie ein noch kaum betretenes, überraschend ergiebiges Arbeitsfeld, welches ohne allzugrosse Mühe die merkwürdigsten Resultate ernten lässt.

Zum Theil wegen der veränderten Fassung des Charakteristikenproblems, zum Theil wegen der eben entwickelten methodischen Anschauungen des Verfassers hat von älteren, dem Gegenstande nach mit der vorliegenden zusammenhängenden Untersuchungen ausser einer eleganten, von Herrn Halphen eingeführten und von Herrn Schubert zu einem eigenthümlichen Calcül ausgebildeten symbolischen Schreibart für diese Betrachtung beinahe Nichts verwerthet werden können; es sind daher auch keine anderen Vorkenntnisse zum Studium derselben erforderlich, als die der Grundlagen der symbolischen Methode.**)

---

*) Die Bedeutung, welche dieser Form in der Theorie der Kegelschnitte zukommt, kann man am besten aus dem Umstande ermessen, dass man — wie hier beiläufig erwähnt werden mag — das volle Formensystem beliebig vieler ternärer quadratischer Formen angeben kann, sobald man für diese Form ein endliches, vollständiges System aufgestellt hat. Aehnliches gilt natürlich von allen analogen Parameterdarstellungen.

**) Diese sind entwickelt in den folgenden Abhandlungen:

Clebsch „*Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen*". Crelle's Journal Bd. 59, woselbst der Fundamentalsatz κατ' ἐξοχήν dieser Theorie auf-

Um dies zu ermöglichen, ist das Wenige, das aus älteren Darstellungen herübergenommen werden konnte, hier reproducirt worden. Es war im Wesentlichen nur die bereits von Chasles angegebene Zurückführung des auf mehr als zwei Kegelschnittsysteme bezüglichen Charakteristikenproblems auf die zwei Systeme betreffende Aufgabe.

1.

Das Charakteristikenproblem.

Wir gehen nun dazu über die Aufgabe, um welche es sich handeln soll, genauer festzustellen, und zwar allgemein für beliebige algebraische Formen mit beliebig vielen Veränderlichen desselben Gebietes oder verschiedener Gebiete.

Wir nehmen an, es befinde sich in einem System algebraischer Formen, welches durch das Verschwinden gewisser Invarianten und Covarianten definirt ist, deren Gesammtheit wir mit A bezeichnen wollen, eine Form, für welche gewisse andere covariante Bildungen B verschwinden.

Dann wird die Gesammtheit der zu dem System (A) gehörigen Formen, für welche $B = 0$ ist, eine Mannichfaltigkeit von niedrigerer Dimension bilden, als das — als irreducibel angenommene — System (A) selbst, da sonst die Formen B zu den Formen A gehörten.

Es wird also in dem System (A) unendlich viele, die gegebene Form enthaltende, einfach ausgedehnte algebraische Mannichfaltigkeiten geben, für deren sämmtliche Formen keine der Covarianten B oder höchstens eine *einzelne* zu B gehörige *Invariante* B_1 verschwindet. Auf einer solchen Mannichfaltigkeit nun wird man immer einen Parameter t, welcher für die gegebene Form den Werth t_0 annimmt, so einführen können, dass jeder der Ausdrücke B dividirt durch eine ganze Potenz von $(t - t_0)$ für den Werth $t = t_0$ gegen eine endliche

---

gestellt wird, nämlich der Satz, dass man durch die symbolischen Operationen *alle* rationalen Invarianten unbeschränkt veränderlicher Formen erhält;

Clebsch: „*Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*“, Gött. Abhdlg. Bd. 17, 1872, wo der Satz über die Zurückführbarkeit von Formen mit mehreren Veränderlichen („Reihen von Veränderlichen“ in der Terminologie von Clebsch) auf die Formen ihres „eigentlich reducirten Systems“ bewiesen wird, und

Gordan, „*Ueber Combinanten*“, Math. Annalen Bd. 5, wo die nach den Formen des eigentlich reducirten Systems fortschreitenden Reihenentwicklungen, soweit sie hier in Betracht kommen, angegeben sind.

Aus der Theorie der ternären quadratischen Formen wird nur das vorausgesetzt, was etwa in Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie“ darüber gesagt ist.

Grenze convergirt (B_1 ausgenommen, das seinen Werth Null beibehält). Es wird dann in der Umgebung des Punktes t_0 jener Mannichfaltigkeit $B_i = (t - t_0)^{\varkappa_i} \cdot B_i'$, wo B_i' für $t = t_0$ nicht mehr verschwindet.

Man erhält so für *jede* zu B gehörige Invariante oder Covariante einen bis auf eine Potenz eines constanten Factors bestimmten Werth, und für jede absolute Invariante und Covariante einen völlig bestimmten Werth*), wenn man jede Form B_i durch die zugehörige B_i' ersetzt; *und zwar sind die B_i' mit der Grundform und unter einander durch dieselben identischen Relationen verknüpft, welche die B_i verbanden, so lange sie nicht identisch Null waren***). — Ich bezeichne nun die gegebene Form, für welche noch mehr als eine Invariante oder Covarianten B_i verschwinden, die nicht zu A gehören, als *unvollständig in Bezug auf das System von Invarianten und Covarianten A*; als in Bezug auf dieses System *vollständig* dagegen, wenn man alle B_i durch die auf die angegebene Art bestimmten Formen B_i' ersetzt hat.

Als *„vollständige Form" im engeren Sinne* wollen wir dieselbe bezeichnen, wenn das System A nur aus denjenigen Invarianten und Covarianten besteht, welche für *alle* Formen der gleichen Ordnung, Classe etc. identisch Null sind, wenn also die durch $A = 0$ definirte Mannichfaltigkeit von Formen (A) die höchstmögliche Dimension hat, und (folglich) linear ist.

Es werden nun jeder unvollständigen Form unendlich viele vollständige Formen *zugehören*, welche man durch die verschiedenen Grenzprocesse der geschilderten Art erhält. Haben wir insbesondere eine unvollständige Form P als Glied einer algebraischen, zwei- oder mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M gegeben, welche der durch das Verschwinden von A definirten Mannichfaltigkeit (A) angehört, ohne zugleich einer Mannichfaltigkeit anzugehören, welche durch das Verschwinden eines A umfassenden Systems von Invarianten und Covarianten definirt ist, so wird man P noch auf unendlich viele Arten mit Hilfe einfach ausgedehnter Mannichfaltigkeiten vervollständigen können, welche dem System M angehören. Führt man dies auf alle wesentlich verschiedenen Arten aus, so erhält man ein System von zu P gehörigen, in Bezug auf A vollständigen Formen, welches alle solche Formen umfasst, die als Grenzlagen von Formen der Mannichfalltigkeit M angesehen werden können. Dieses System wird im Allgemeinen nicht sämmtliche zu P gehörige, in Bezug auf A vollständige

*) Hierher ist in diesem Zusammenhange auch der Werth ∞ zu rechnen, da man, um den bestimmten Werth 0 zu erhalten, in diesem Falle nur den reciproken Ausdruck zu betrachten braucht.

**) Das Festhalten an diesen Relationen ist der Kern der Sache; von hier aus lässt sich auch die Verallgemeinerung der im Text eingeführten Begriffe auf simultane Systeme vollziehen.

Formen umfassen. Wir betrachten nun allein diejenigen derselben, welche in diesem System vorkommen, als *zu der Mannichfaltigkeit M gehörig;* die anderen, welche nicht durch innerhalb M verlaufende Grenzprocesse erhalten werden können, wollen wir als *dem System M nur „scheinbar" angehörig* bezeichnen.

Dann werden wir eine unvollständige Form P, welche mehreren in (A) enthaltenen Systemen $M, M', M'' \ldots$ angehört, als denselben nur *scheinbar zugleich angehörig* zu betrachten haben, wenn keine der zu M und P gehörigen vollständigen Formen zugleich eine vollständige Form von $M', M'', \ldots$ ist, oder genauer, wenn unter den zu M gehörigen vollständigen Formen P_M sich keine findet, deren ergänzende Formen B_i' von den ergänzenden Formen je einer zu $M', M'' \ldots$ gehörigen vollständigen Form $P_{M'}, P_{M''} \ldots$ sich nur um dieselben Potenzen je eines für $M', M'', \ldots$ constanten Factors unterscheiden. Alle zu P gehörigen vollständigen Formen dagegen, bei welchen das Letztere eintritt, betrachten wir als den Systemen $M, M', M'' \ldots$ *wirklich zugleich angehörig.*

Hinsichtlich der Multiplicität dieses Angehörens bedarf es noch besonderer, sich in jedem Falle von selbst ergebender Bestimmungen. Setzen wir dieselben als ausgeführt voraus, so können wir die Aufgabe, um welche es sich hier handelt, kurz so aussprechen:

Es sind mehrere Systeme von Formen, $M, M', M'' \ldots$ gegeben, für deren sämmtliche Formen alle Invarianten und Covarianten eines Systems A verschwinden, ohne dass für sämmtliche Formen eines dieser Systeme — abgesehen von einer einzigen etwa verschwindenden Invariante — noch irgend eine andere covariante Bildung identisch Null ist.

Anzugeben, wann eine diesen Systemen gemeinschaftlich angehörende unvollständige Form denselben scheinbar, oder wirklich zugleich angehört; und, falls die Zahl der allen Systemen gemeinsamen vollständigen Formen eine endliche ist, diese Zahl zu bestimmen.

Wir wollen nun diese Fragen unter der Voraussetzung, dass wir es mit vollständigen Formen im engeren Sinne zu thun haben, für die ternären quadratischen Formen in dem Falle behandeln, wo ein einfach- und ein vierfach ausgedehntes System zum Durchschnitt zu bringen sind.

2.

Das Charakteristikenproblem der ternären quadratischen Formen.

Die eben formulirte Aufgabe erfährt eine wesentliche Vereinfachung für die quadratischen Formen (und ähnlich für alle Formen, die nicht mehr als eine Invariante haben) durch den Umstand, dass eine solche Form im Allgemeinen nicht unvollständig sein kann; oder mit anderen Worten, dass eine quadratische Form, wenn eine covariante Bildung

derselben verschwindet, die nicht für jede quadratische Form verschwindet, von weniger Constanten abhängt, als die allgemeinste quadratische Form*).

Wir behaupten insbesondere in Bezug auf die ternären quadratischen Formen, die uns hier allein angehen, dass die Covariante $(abu)^2$ einer solchen Form $a_x{}^2$**) identisch verschwinden muss, sobald irgend eine Covariante derselben identisch verschwindet, die nicht für jede ternäre quadratische Form Null ist.

In der That, nehmen wir an, es verschwinde irgend eine Covariante von $a_x{}^2$ identisch. Dann verschwinden sämmtliche Formen ihres eigentlich reducirten Systemes ebenfalls identisch. Diese verschwinden nun entweder für jede Form $a_x{}^2$, oder es muss, falls nicht die gegebene Form selbst den Factor $(abc)^2$ haben soll, sich wenigstens eine Form unter denselben befinden, die von diesem Factor frei ist, und sich also auf Grund der von Herrn Gordan angegebenen Entwickelung als eine nach Potenzen von $u_x{}^2 \cdot (abc)^2$ fortschreitende Reihe darstellen lässt, in welcher der Coefficient der nullten Potenz ein Product einer Potenz von $a_x{}^2$ und einer Potenz von $(abu)^2$ ist.

Da auch diese Reihe nicht identisch verschwinden kann, ohne dass ihre einzelnen Glieder verschwinden, und $a_x{}^2$ nicht verschwindet, so folgt $(abu)^2 \equiv 0$.

Da die Invariante $(abc)^2$ Null in der zweiten Ordnung wird, wenn $(abu)^2$ in der ersten Ordnung für beliebiges u verschwindet, ergiebt sich zugleich, dass die Grenzlagen aller übrigen Covarianten bestimmt sind, sobald man die von $(abu)^2$ auf die im § 1 angegebene Art bestimmt hat; so dass man, um zu entscheiden, ob eine zwei Systemen angehörige unvollständige Form $a_x{}^2$ denselben scheinbar, oder wirklich zugleich angehört, nur darauf zu achten hat, ob unter den Formen, die man nach § 1 an Stelle der Covariante $(abu)^2$ erhält, sich solche befinden, die sich nur um einen Factor unterscheiden, oder nicht.

3.

Die doppelte Parameterdarstellung der Kegelschnitte einer Ebene.

Bei einer Untersuchung der Mannichfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene erscheint es, wie bereits hervorgehoben, naturgemäss,

*) Dies ist natürlich nur ein Aequivalent des Satzes, dass die irreducibelen quadratischen Formen linear in einander transformirbar sind; in Folge wovon man hier einen Unterschied zwischen *allgemeinen* und *besonderen* Formen machen kann, was in den höheren Fällen nicht mehr angeht. Bei den Formen, welche nicht mehr als *zwei* Invarianten haben (insbesondere also auch den *ternären cubischen* und den *binären biquadratischen Formen*) findet noch eine ähnliche Vereinfachung des Charakteristikenproblems statt. Jener Satz durfte in unserem Zusammenhange natürlich nicht benutzt werden.

**) Ich bediene mich hier der allgemein üblichen Bezeichnungen.

diese Gebilde auch formal als Elemente der von ihnen gebildeten Mannichfaltigkeit darzustellen, d. h. dieselben von einem senären Parameter (oder genauer, einem Paar solcher Parameter, wie wir sogleich sehen werden) abhängig zu machen.

Wir werden uns also, behufs einer Untersuchung zunächst der von allen Curven zweiter *Ordnung* der Ebene gebildeten Mannichfaltigkeit einer Parameterdarstellung von der Form

$$U_M m_x^2 = 0 \tag{1}$$

bedienen. Hier verstehen wir unter $U_X = 0$, $u_x = 0$ (senäre Gebilde werden im Folgenden immer mit grossen, ternäre mit kleinen Buchstaben bezeichnet) die Coincidenzbedingung eines Punktes X und einer linearen Mannichfaltigkeit U fünfter Stufe des senären, bezüglich eines Punktes x und einer Geraden u des ternären Gebietes, und es sollen, nach der gewöhnlichen Vorstellung „erst Symbole M mit Symbolen m multiplicirt eine reelle Bedeutung erlangen".

Die Gleichung (1) wird im Allgemeinen — und wir betrachten hier nur den allgemeinen Fall, wiewohl die besonderen kein geringeres Interesse besitzen — sie wird im Allgemeinen zu je zwei verschiedenen Räumen U zwei verschiedene Curven 2. O. liefern; und es wird, da linear abhängigen Räumen U vermöge (1) ebenso beschaffene Curven entsprechen, auch umgekehrt möglich sein, zu einer gegebenen Curve 2. O. den ihr entsprechenden Raum U eindeutig zu bestimmen.

Dasselbe gilt von der Abbildung der Mannichfaltigkeit aller Curven 2. *Classe* der Ebene auf die *Punkte* des senären Gebietes, welche, in der umgekehrten Richtung, ebenfalls durch (1) vermittelt wird.

Sei nämlich $u_\alpha^2 = 0$ irgend eine Curve 2. Classe, so stellt

$$U_M m_\alpha^2 = 0, \tag{1a}$$

U als veränderlich betrachtet, einen Punkt X des senären Gebietes vor, und zwar entsprechen linear abhängigen Curven 2. Cl. linear abhängige Punkte. Es ist aber das Bestehen der Gleichung (1a) einerseits die Bedingung dafür, dass die Curve 2. O. deren Gleichung $U_M m_x^2 = 0$ ist, und die Curve 2. Cl. $u_\alpha^2 = 0$ einander conjugirt sind; andererseits dafür, dass der Raum U durch den u_α^2 entsprechenden Punkt X hindurchgeht. Würden nun 6 linear unabhängigen Curven 2. Cl. nicht ebenso beschaffene Punkte entsprechen, sondern diese bereits in einem linearen Gebiet fünfter Stufe enthalten sein, so würde die letzterem entsprechende Curve 2. O. zu jenen 6 Curven 2. Classe conjugirt sein, was nicht angeht.

Also ist zugleich mit der durch (1) *vermittelten ein-eindeutigen Abbildung der Räume U des senären Gebietes* R_5 *auf die Mannichfaltigkeit der Curven* 2. *O. der Ebene eine ebenfalls eindeutig umkehrbare Abbildung der Curven* 2. *Cl. auf die Punkte X dieses Gebietes gegeben. Conjugirten Curven entsprechen incidente Elementenpaare von* R_5.

Die Gleichungen (1) und (1a) geben uns zu jedem $R_4^1 : U$ von R_5 die zugehörige Curve 2. O. und zu jeder Curve 2. Cl. den zugehörigen Punkt X von R_5. Da wir wissen, dass die inversen Schritte ebenfalls ausführbar sind, so tritt nun die Aufgabe an uns heran, die Formeln, durch welche dies geschieht, und die, wie wir von vornherein sagen können, den Formeln (1) und (1a) völlig gleichgebaut sind und zu ihnen in umkehrbarer Beziehung stehen, wirklich herzustellen.

Wir haben zu diesem Behufe nach dem vorstehenden Satze nur mit Hilfe der Formel (1) die Curven 2. O. aufzusuchen, welche irgend fünf linear unabhängigen, einen gegebenen Punkt X enthaltenden R_4^1 von $R_5 : U_1$, $U_2 \ldots U_5$ entsprechen, und dann die Gleichung der zu ihnen gemeinsam conjugirten Curve 2. Cl. zu bilden, welche in Bezug auf $U_1 \ldots U_5$ die Combinanteneigenschaft haben muss, dieselben also nur in der Verbindung:

$$(U_1 U_2 \ldots U_5 U) \equiv U_X$$

enthalten kann. In der That ist die ternäre Form 2. Cl.:

$$U_{1_{M_1}} \cdots U_{5_{M_5}} \left\{ \begin{array}{l} (m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5) \\ -\,(m_1 m_3 u)\,(m_2 m_4 u)\,(m_1 m_2 m_5)\,(m_3 m_4 m_5) \end{array} \right\}$$

welche gleich Null gesetzt, jene Curve darstellt, da sie bei Vertauschung je zweier Symbole $M_x m_x^2$ das Vorzeichen wechselt, identisch gleich:

$$\frac{2}{5!}\,(U_{1_{M_1}} \cdots U_{5_{M_5}})\,(m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5)$$

$$= \frac{2}{5!}\,(M_1 M_2 \cdots M_5 X)\,(m_1 m_2 u)\,(m_3 m_4 u)\,(m_1 m_3 m_5)\,(m_2 m_4 m_5).$$

Dieser Ausdruck, für welchen wir kurz

(2) $$N_X u_n^2$$

schreiben wollen, *hat die Form der Gleichung* (1). *Er liefert, gleich Null gesetzt, die einem Punkte X von R_5 entsprechende Curve 2. Classe; ebenso die Gleichung*

(2a) $$N_X a_n^2 = 0$$

den einer gegebenen Curve 2. O.: a_x^2 entsprechenden R_4^1.

Sucht man mit Hilfe der Gleichung (2) zu einem Punkt X die Gleichung der ihm entsprechenden Curve 2. Cl., und dann nach (1) zu dieser wieder den entsprechenden Punkt, so muss man zu dem Punkte X zurückgelangen, und ebenso muss sich die Bedingung dafür, dass die einer gegebenen Curve 2. O. und einer gegebenen Curve 2. Cl. entsprechenden Gebilde incident sind, auf die Bedingung des Conjugirtsein's der ersteren reduciren. Dies findet seinen analytischen Ausdruck in den durch die Gordan'schen Reihenentwickelungen sich ergebenden Identitäten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & N_X U_M m_n^2 \equiv U_X \cdot J \\ \text{II} & N_M u_n^2 m_x^2 \equiv u_x^2 \cdot J \end{array}\right\} \text{ wo } J = \frac{1}{6} N_M m_n^2,$$

welche die Reduction jeder Covariante von (1) geben, die einen der symbolischen Factoren N_M oder m_n^2 besitzt.

Das Verschwinden der (einzigen) Invariante J der Form (1) wird durch die Bedingung ausgeschlossen, dass linear unabhängigen Räumen R_4^1 eben so beschaffene Curven 2. O. entsprechen sollen.

4.

Der Ort der ausgearteten Kegelschnitte.

Da eine ternäre Form 2. O. zu ihrer Covariante 2. Cl. im Allgemeinen in umkehrbarer Beziehung steht, so ist sie bei der im vorigen Paragraphen betrachteten Abbildung zweimal vertreten: einmal durch einen Raum R_4^1, den wir mit W bezeichnen wollen, das andere mal durch einen Punkt Z. Beide sind, zufolge der Gleichungen (1) und (2) der eine aus dem anderen durch die Gleichungen zu bestimmen:

$$W_A^2 U_A \equiv W_M W_{M'} U_{M''} \ (m m' m'')^2 = 0, \tag{3}$$

$$L_Z^2 L_X \equiv N_Z N_Z' N_X'' \ (n n' n'')^2 = 0. \tag{4}$$

Sucht man aus (3) den dem Raume W entsprechenden Punkt Z, und dann aus (4) rückwärts den Z entsprechenden Raum R_4^1, so muss man, falls die Invariante des durch W vorgestellten Kegelschnittes von Null verschieden ist, wieder zu dem Raum W zurückgelangen. In der That wird zu Folge der Reductionsformeln I und II:

$$\text{III} \qquad L_A L_{A'} U_A^2 U_{A'}^2 L_X \equiv \frac{4}{3} U_A^3 \cdot U_X \cdot J^3$$

$$\text{IV} \qquad L_A L_{A'} L_X^2 L_{X'}^2 U_A \equiv \frac{4}{3} L_X^3 \cdot U_X \cdot J^3.$$

Wir haben es also mit einer (im Allgemeinen) ein-eindeutigen, quadratischen Transformation zu thun; und zwar ist, wie der Anblick der Gleichungen (3) und (4) lehrt, die Beziehung zwischen dem Punkte Z und dem ihm zugeordneten Raume W eine derartige, dass Z die lineare Polare des Raumes W in Bezug auf die R_4^1-Mannichfaltigkeit dritter Ordnung: $U_A^3 = 0$, oder kurz Λ^3, und gleichzeitig W die lineare Polare von Z in Bezug auf den Raum R_4^3 dritter Ordnung $L_X^3 = 0$, oder kurz L^3 ist.*)

*) Ein ähnliches Vorkommen bietet bereits die ternäre Geometrie in der Beziehung zwischen einem Punkt und seiner Harmonikale in Bezug auf ein festes Dreieck dar. Hier kann sowohl der Punkt als lineare Polare der Geraden in

Wir wollen im Folgenden diese quadratische Transformation, die wir noch eingehender zu untersuchen haben, kurz als die „*Transformation T*“ bezeichnen, und die in derselben einander entsprechenden Mannichfaltigkeiten von Punkten und Räumen R_4^1 als „*System S*“ und „*System* Σ“ einander gegenüberstellen.

Die beiden Mannichfaltigkeiten L^3 und Λ^3 gehen durch ∞^8 collineare Transformationen in sich über, welche den ∞^8 collinearen Transformationen der Ebene entsprechen, und werden durch eben so viele dualistische Transformationen in einander übergeführt, welche den dualistischen Transformationen der Ebene zugeordnet sind.*)

In Folge des Vorhandenseins der Transformationen der letzteren Art wird man bei der Betrachtung der Mannichfaltigkeiten L^3 und Λ^3 willkürlich von einer derselben den Ausgang nehmen dürfen, indem das Princip der Dualität die entsprechenden Eigenschaften der anderen liefert. Wir wählen der leichteren Aussprache der aufzustellenden Sätze wegen den Raum L^3, dessen Punkte allen Curven 2. Classe der Ebene zugeordnet sind, welche in ein Paar von Strahlenbüscheln (d. h. in ein Punktepaar) ausarten.

Die Gleichung $L_X^3 = 0$ wird, wie sich aus dieser Bemerkung ergiebt, und wie eine leichte Rechnung bestätigt, identisch erfüllt, wenn man für X einen Punkt einsetzt, dessen Gleichung die Form:

$$U_M m_x m_y = 0 \tag{5}$$

hat. Betrachtet man x und y als veränderlich, und lässt beide Punkte die ganze Ebene durchlaufen, so erhält man in der Gleichung (5) eine *Parameterdarstellung des Raumes* L^3.

Lässt man x und y zusammenfallen, so verwandelt sich (5) in die *Parameterdarstellung einer Fläche*

$$U_M m_x^2 = 0, \tag{6}$$

deren Punkte den Punkten des ternären Gebietes ausnahmslos eindeutig zugeordnet sind.

Da die Gleichung (6) von (1) nicht verschieden ist, folgt, dass den Punkten der Schnittcurve dieser Fläche mit einem R_4^1 in der Ebene eine Curve 2. O. entspricht. Da sich zwei solche in vier Punkten schneiden, ist sie von der vierten Ordnung; wir bezeichnen sie deshalb mit F_2^4, und ihr dualistisches Gegenstück mit Φ_2^4.

Man erkennt sofort, dass den Punkten einer Geraden der Ebene

Bezug auf die von den Ecken des Dreiecks dargestellte Curve 3. Classe, als auch die Gerade als lineare Polare des Punktes in Bezug auf die von den Seiten des Dreiecks gebildete Curve 3. O. betrachtet werden.

*) Es kann das Vorliegende geradezu als eine auf diese Transformationsgruppe bezügliche Untersuchung angesehen werden.

die Punkte eines Kegelschnittes jener Fläche zugeordnet sind, und dass überhaupt Curven n^{ter} Ordnung der Ebene und Curven $2n^{ter}$ Ordnung von F_2^4 einander entsprechen. Zugleich ergiebt sich, dass Λ^3 der Ort aller derjenigen Räume R_1^4 ist, welche F_2^4 in einer zerfallenden Curve 4. O. schneiden, d. h. in einem einzigen Punkte berühren, und Φ_2^4 der Ort derjenigen, welche F_2^4 längs eines ganzen Kegelschnittes berühren.

Die lineare Polare eines Punktes Z von F_2^4 in Bezug auf L^3 wird unbestimmt, wie sich auch unmittelbar aus dem identischen Verschwinden der Covariante $(\alpha\alpha' x)^2$ eines Doppelpunktes $(u_\alpha)^2$ ergiebt, so dass also F_2^4 auch durch die äquivalenten Gleichungssysteme:

$$L_Z^2 L_X \equiv 0 \quad \text{oder} \quad N_Z N_Z' (nn'x)^2 \equiv 0$$

definirt ist. *Die Punkte von F_2^4, und zwar nur diese, sind daher Doppelpunkte von L^3; es folgt hieraus, dass L^3 von sämmtlichen Sehnen von F_2^4 beschrieben wird.* Den Punkten solcher Sehnen von F_2^4, welche F_2^4 in zwei getrennten Punkten treffen, entsprechen hierbei die Punktepaare einer allgemeinen quadratischen Involution einer Geraden; den Tangenten von F_2^4 die Punktepaare einer Involution, deren Doppelelemente zusammengefallen sind.

*Es folgt weiter, dass der Raum L^3 von zwei Schaaren von je ∞^2 Ebenen beschrieben werden kann, von welchen die erste aus allen Ebenen besteht, welche F_2^4 in einem Kegelschnitte treffen, und die Punkte enthalten, welche den Punktepaaren einer Graden des ternären Gebietes entsprechen; während die der zweiten Tangentialebenen**) *von F_2^4 sind und solche Punkte tragen, welche Punktepaaren xy der Ebene entsprechen, die einen festen Punkt x enthalten.* Die Parameterdarstellung der Ebenen dieser „zweiten Art" wird daher

$$(MM'M''XYZ)\,(mm'm'')\,m_x m_x' m_x'' = 0.$$

Durch einen Punkt $U_M m_\xi m_\eta =$ von L^3 gehen zwei solcher Ebenen, deren Parameter ξ und η sind; — umgekehrt schneiden sich zwei Ebenen zweiter Art immer in einem Punkt von L^3.

Der Anblick der Gleichung (5) zeigt, dass irgend zwei feste Ebenen dieser Schaar durch die Gesammtheit der übrigen collinear auf einander

---

*) D. h. Ebenen, welche alle durch einen gegebenen Punkt $\dot{x}$ von F_2^4 gehenden Tangenten dieser Fläche enthalten. Eine solche Ebene trifft F_2^4 in *vier* unendlich benachbarten Punkten, als deren Verbindungslinien irgend 6 in ihr gelegene Tangenten von F_2^4 angesehen werden können, die eine Involution bilden. Andere Ebenen als diese beiden Arten giebt es nicht auf L^3; auch enthält L^3 keine Gerade, die F_2^4 nur in einem einzigen Punkte trifft (wohl aber solche, die F_2^4 gar nicht treffen), wie überhaupt keine Curve, die mit F_2^4 eine ungerade Zahl von Punkten gemein hätte. (S. § 6.)

bezogen sind, woraus sich eine einfache projective Erzeugungsart von F_2^4 und L^3 ergiebt.

Durch einen Punkt von L^3, dessen Gleichung

$$U_m m_\xi m_\eta = 0$$

ist, geht ferner eine Ebene der ersten Art, welche den durch die Punkte (ξ) und (η) von F_2^4 gehenden Kegelschnitt dieser Fläche enthält, und also den gegebenen Punkt mit den Berührungspunkten der beiden von ihm an F_2^4 gehenden Tangenten verbindet. Setzt man

$$(\xi\eta x) \equiv u_x,$$

so erhält man hieraus die Parameterdarstellung der Ebenen erster Art:

$$(M M' M'' X Y Z)\,(m m' u)\,m m'' u)\,(m' m'' u) = 0.$$

Zwei Ebenen dieser Art treffen sich in einem Punkte von F_2^4 und liegen in einem Raum R_4^1 von Λ^3; eine Ebene erster und eine Ebene zweiter Art treffen sich im Allgemeinen nicht, in besonderen Fällen aber in allen Punkten einer Tangente von F_2^4.

In gleicher Weise, wie L^3 wird auch Λ^3 von zwei Arten von Ebenen (d. h. hier R_4^1-Bündeln) beschrieben, und zwar ergiebt sich aus der oben aufgestellten Definition von Λ^3 und Φ_2^4, dass dies wieder die beiden eben betrachteten Schaaren von Ebenen sind, jedoch vertauscht, so dass die Ebenen erster und zweiter Art von L^3 als Ebenen zweiter, bezüglich erster Art von Λ^3 bezeichnet werden müssen*).

Da die Fläche F_2^4 auf die Punkte des ternären Gebietes eindeutig umkehrbar bezogen ist, hindert uns nichts, dieselbe geradezu als Träger desselben aufzufassen. Wir werden dadurch in den Stand gesetzt, jede ternäre Construction so auszusprechen, dass sie im Gewande einer senären erscheint, und umgekehrt, was häufig zur Vereinfachung derselben beiträgt, und uns ausserdem neue Eigenschaften der Mannichfaltigkeiten L^3 und F_2^4 kennen lehrt.

So ergeben sich beispielsweise alle die bekannten Sätze, welche von den Eigenschaften conjugirter Kegelschnittsysteme handeln, fast unmittelbar aus unserer Abbildung. Wir wollen uns jedoch hier nicht damit aufhalten, diese ganze Theorie zur Ableitung zu bringen, sondern nur einige Sätze hier anfügen, die auf das Polarsystem einer Curve 2. Cl. u_α^2 Bezug haben.

Wir hatten gesehen, dass im System S der Ort aller Punkte P, welche Curven 2. Classe zugeordnet sind, die sich auf eine gegebene Curve 2. O. stützen, derjenige Raum R_4^1 ist, welcher die gegebene Curve aus dem ternären Gebiete F_2^4 ausschneidet.

---

*) Es ergiebt sich hier die Bemerkung, dass die Punkte von F_2^4 aus den Ebenen erster Art von L^3 durch collineare R_3^1-Bündel projicirt werden — was man als eine zweite projective Erzeugungsart von F_2^4 ansehen mag.

Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass die zu einer gegebenen Curve 2. Cl. u_α^2 conjugirten Geradenpaare aus dem ternären Gebiet F_2^4 durch diejenigen Räume R_4^1 von Λ^3 ausgeschnitten werden, welche den jener Curve 2. Cl. entsprechenden Punkt P' enthalten, und dass die durch P gehenden Räume R_3^1 die Fläche F_2^4 in den Punkten eines Polvierecks von u_α^2 treffen.

Man erhält also zu einer gegebenen Geraden den Pol in Bezug auf u_α^2, wenn man die Ebene erster Art, welche ihren Repräsentanten auf F_2^4 enthält, mit P durch einen R_3^1 verbindet, der dann den Pol auf F_2^4 ausschneidet.

Umgekehrt wird im System S (und analog im System Σ) dasjenige Kegelschnittsystem, welches von allen Kegelschnitten gebildet wird, in Bezug auf welche ein gegebener Punkt und eine gegebene Gerade Pol und Polare sind, durch die Punkte eines linearen R_3^1 dargestellt, welcher die Repräsentanten beider auf $2F_2^4$ ausschneidet; und das gleichfalls zu sich selbst dualistische System aller Kegelschnitte, die ein gegebenes Poldreieck haben, ist im Systeme S den Punkten einer Ebene zugeordnet, welche die Repräsentanten der Ecken jenes Dreiecks auf F_2^4 verbindet.

Den Punkten eines R_3^1 von S, welcher F_2^4 in vier consecutiven Punkten (einer Ebene zweiter Art) trifft, entsprechen die Curven 2. Cl. der Ebene, welche zwei feste Gerade berühren; dual entsprechen den R_4^1 einer Sehne von F_2^4 die Curven 2. O., welche zwei gegebene Punkte enthalten.

Dies mag genügen, um die Eigenschaften des Ortes der ausgearteten Kegelschnitte wenigstens im Allgemeinen zu charakterisiren.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der durch die Gleichungen (3) und (4) vermittelten Transformation T.

5.

Das Unbestimmtwerden der Transformation T.

Die Formeln (3) und (III) des vorigen Paragraphen sagen aus, dass einem R_4^1 W von Σ, welcher der Gleichung $W_A^3 = 0$ genügt, in der Transformation T ein Punkt von S entspricht, welchem bei erneuter Anwendung von T kein bestimmter R_4^1 von Σ mehr zugeordnet ist. *Es folgt hieraus (was auch unmittelbar einleuchtet), dass den Räumen von Λ^3 in der Transformation T Punkte von F_2^4, den Punkten von L^3 Räume R_4^1 von Φ_2^4 zugeordnet sind. Und zwar entspricht, wie leicht zu sehen, je ∞^2 Räumen von Λ^3, die durch eine Ebene zweiter Art Π von L^3 gehen, in der quadratischen Transformation der Punkt P, in welchem diese Ebene F_2^4 berührt.* Umgekehrt entsprechen jedem Punkte P von F_2^4 als Grenzlagen der

den benachbarten Punkten von P in der Transformation T zugeordneten Räume ∞^2 Räume R_4^1 von Λ^3, welche alle durch die Tangentialebene Π von F_2^4 in P hindurchgehen. Diese Unbestimmtheit der Transformation T für die Punkte von F_2^4 wird aufgehoben, wenn man sich einem Punkte P dieser Fläche auf einer bestimmten, nicht ganz auf F_2^4 verlaufenden Curve PQ nähert, sobald man nur festsetzt, dass als der dem Punkte P *dieser Curve* entsprechende R_4^1 von Σ die Grenzlage des einem Punkte X derselben in T entsprechenden R_4^1 gelten soll, welche derselbe erreicht, wenn X mit P zusammenfällt.

Die Bestimmung dieser Grenzlage lässt sich besonders leicht bewerkstelligen, wenn PQ eine *Gerade* ist. Man erhält dann nämlich als Gleichung der dem Punkte P von PQ entsprechenden Curve 2. O.:

$$N_P N_{Q'} (nn'x)^2 = 0, \tag{7}$$

mithin als Gleichung des ihm in Σ zugeordneten R_4^1:

$$N_P N_{Q'} N_{X''} (nn'n'')^2 = 0. \tag{8}$$

Dieser Ausdruck ist aber eine Polare von

$$K_X^2 \equiv L_P L_X^2 \equiv N_P N_{X'} N_{X''} (nn'n'')^2.$$

Um zu einer durch einen Punkt P von F_2^4 gehenden Geraden den zugeordneten Raum R_4^1 zu finden, betrachte man also den Tangentialkegel K^2 von L^3 im Punkte P, welcher das Umhüllungsgebilde der zu Φ_2^4 gehörigen quadratischen R_4^1-Mannichfaltigkeit $\varkappa^2$ von Π ist. Dieser Raum enthält, da die linke Seite von (7) und also auch von (8) identisch verschwindet, sobald Q der Ebene Π angehört, die Tangentialebene Π des Punktes P von F_2^4 doppeltzählend*), und kann daher von einer quadratischen Schaar von ∞^1 Räumen R_3^1 beschrieben werden, welche die Ebene Π enthalten und dieselbe mit den durch P gehenden Ebenen erster Art von L^3 verbinden**).

Um nun in einem Punkte P von F_2^4, der einer Geraden PQ angehört, den ihm in Σ entsprechenden Raum R_4^1 zu finden, haben wir gemäss der Formel (8) einfach die Polare eines beliebigen Punktes Q dieser Geraden in Bezug auf K^2 zu bilden. Es haben aber alle Punkte Q, welche in einem und demselben durch Π gehenden Raum R_3^1 liegen, die nämliche Polare. Also:

„Damit einem Punkte P von F_2^4 als Punkt zweier verschiedener Geraden vermöge der Transformation T ein und derselbe R_4^1 von Λ^3 entspreche, ist es nothwendig und ausreichend, dass beide Gerade mit

*) Die quadratische Polare eines nicht auf F_2^4 gelegenen Punktes von L^3 enthält, wie sich hier ebenfalls ergiebt, eine *Gerade* doppelt zählend, die Polare jenes Punktes in Bezug auf den Kegelschnitt von F_2^4, in dessen Ebene er liegt.

**) Der Schnitt von L^3 und K^2 ist also doppeltzählend der Kegel R_3^3, welcher die Punkte von F_2^4 aus P projicirt.

der Tangentialebene Π *von* F_2^4 *im Punkte* P *durch einen und denselben Raum* R_3^1 *verbunden werden können. Der ihnen dann gemeinsam entsprechende* R_4^1 *von* Λ^3 *ist die Polare eines Punktes jenes* R_3^1 *in Bezug auf den Tangentialkegel* K^2 *von* L^3 *im Punkte* P*, oder in Bezug auf die Enveloppe von* K^2*, die in dem* R_4^1*-Bündel erster Art* Π *von* Λ^3 *enthaltene quadratische* R_1^1*-Mannichfaltigkeit* $\varkappa^2$ *von* Φ_2^4*.*“

Diese Construction, die vielleicht an Anschaulichkeit noch gewinnt, wenn man sie in's Dualistische überträgt, wird nur dann unausführbar, wenn eine der beiden Geraden in der Ebene Π selbst liegt. Dann aber erhält man den dem Punkte P einer solchen Geraden entsprechenden R_4^1 von Φ_2^4 ohne Weiteres, indem man den Tangentialraum eines beliebigen Punktes Q derselben an L^3 construirt.

Führt man den Grenzübergang zu dem Punkte P von F_2^4 nicht auf einer Geraden, sondern auf einer beliebigen Curve aus, so erhält man die der Tangente derselben im Punkte P nach obigem Satze zugeordnete Grenzlage, ausgenommen den Fall, wo diese Gerade in Π liegt, indem dann der einem Punkt Q jener Curve, welcher zu P benachbart ist, in Bezug auf K^2 zugeordnete R_4^1 unbestimmt wird.

Es kann also jeder einen Punkt P *von* F_2^4 *enthaltende Curvenzweig rücksichtlich der Transformation* T *durch seine Tangente in* P *ersetzt werden, wenn derselbe* F_2^4 *nicht in* P *berührt.*

In diesem Falle wird eine besondere Untersuchung nothwendig.

6.

Einfach und vierfach ausgedehnte Mannichfaltigkeiten, der Transformation T unterworfen. Die Charakteristiken derselben.

Wir sind durch die Untersuchung von § 3 in den Stand gesetzt, zu jedem durch ein System invarianter Bedingungen $\Pi = 0$, welche etwa eine Curve 2. Classe u_α^2 zu erfüllen hat, definirten Kegelschnittsysteme die Gleichungen der beiden ihm in S und Σ entsprechenden Mannichfaltigkeiten anzugeben.

Da man bekanntlich jede Form von Π aus einer ganzen Function der in verschiedenen Veränderlichen geschriebenen Formen:

$$u_\alpha v_\alpha,\ a_x a_y \equiv (\alpha\beta x)(\alpha\beta y),\ a_\alpha^2,\ u_x$$

durch Faltung mit zu u_α^2 fremden Formen ableiten kann, so erhält man jene Gleichungen, indem man in jeder so geschriebenen Form von Π die Symbole von u_α^2, a_x^2 das eine Mal durch Symbole von $N_X u_n^2$, bezüglich $N_X N_{X'} (nn'x)^2$, das andere Mal durch Symbole von $U_M U_{M'} (mm'u)^2$, bezüglich $U_M m_x^2$ ersetzt.

Ebenso kann man zu jeder in R_5 gegebenen algebraischen Punkt- oder R_4^1-Mannichfaltigkeit sofort die Gleichungen des entsprechenden

Kegelschnittsystems herstellen, wenn man für X Symbole von $U_M m_\alpha{}^2$ oder für U Symbole von $N_X a_n{}^2$ einführt.

Ist eine algebraische Punktmannichfaltigkeit des Systems S durch eine Gleichung für X gegeben, etwa $A_X{}^l = 0$, so entspricht ihr vermöge der Transformation T in Σ eine Mannichfaltigkeit

$$U^2_{A^{(1)}} \cdots U^2_{A^{(l)}} A_{A^{(1)}} \cdots A_{A^{(l)}} = 0$$

von doppelt so hoher Ordnung. Geht man durch erneute Anwendung von T wieder zu dem System S zurück, so erhält man in Folge der Identität (IV):

$$L^{(1)}_X L'^{(1)}_X \cdots L^{(l)}_X L'^{(l)}_X \cdot L^{(1)}_{A^{(1)}} L'^{(1)}_{A^{(1)}} \cdots L^{(l)}_{A^{(l)}} L'^{(l)}_{A^{(l)}} \cdot A_{A^{(1)}} \cdots A_{A^{(l)}}$$
$$\equiv \left[\frac{4}{3} J^3\right]^l \cdot \left[L^3_X\right]^l \cdot A^l_X \cdot$$

Es scheidet sich also der Factor $L_X{}^3$ l-mal ab, was daher rührt, dass die transformirte Mannichfaltigkeit $\Phi_2{}^4$ l-mal enthält.

Dass aber in der Transformation T Mannichfaltigkeiten von den Ordnungen l und $2l$ einander entsprechen, ist offenbar eine Besonderheit: als den allgemeinen Fall werden wir denjenigen anzusehen haben, wo $A_X{}^l = 0$ bereits selbst mit der Eigenschaft behaftet ist, welche bei dem transformirten Raum die Abscheidung des Factors $L_X{}^3$ bei Anwendung der Transformation T herbeiführt.

Um die allgemeinste Form der Gleichung eines Raumes $M_4{}^l$, welcher λ mal durch $F_2{}^4$ geht, zu finden, setze man für die Symbole von $u_\alpha{}^2$ die Symbole einer sonst beliebigen, in einem binären Parameter t linearen, und in den Linien des ternären Gebietes quadratischen Form $\sigma_t u_s{}^2$, deren Covariante $\sigma_t \sigma_t' (ss'x)^2$ für $t = t_0$ identisch verschwindet. Nehmen wir nun an, dass die Gerade, welche der durch erstere Form dargestellten Kegelschnittschaar im System S entspricht:

$$(M M' X Y Z T) (\sigma \sigma') m_s{}^2 m'_{s'}{}^2 = 0$$

nicht in dem $F_2{}^4$ angehörigen Punkte $U_M m_s{}^2 \sigma_{t_0} = 0$ den Raum $A_X{}^l = 0$ berührt, und dieser Punkt keine weitere Besonderheit $A^l{}_X = 0$ gegenüber besitzt, so wird der Ausdruck $A_X{}^l$ für $t = t_0$ in der λ^{ten} Ordnung verschwinden müssen. Nehmen wir ferner an, es sei $A_X{}^l$ in der zu Anfang dieses Paragraphen angegebenen Weise geschrieben. Enthalten dann diejenigen Terme von $A_X{}^l$, welche von $a_\alpha{}^2$ frei sind — und solche muss es immer geben, wenn $A_X{}^l$ irreducibel sein soll — λ_1 Symbole von $a_x{}^2$, so wird $A_X{}^l$ unter der obigen Voraussetzung von der Ordnung λ_1 Null werden, da alle anderen Terme in höherem Grade verschwinden. Es folgt also $\lambda_1 = \lambda$, und wir erhalten als allgemeinste Gleichungsform eines Raumes von der Ordnung l, welcher λ mal durch $F_2{}^4$ geht, einen Ausdruck vom Typus:

$$N_X^{(1)} \cdots N_X^{(l)} \Pi_1 \left[(u_n^2), \left((nn'x)^2 \right) \right] = 0,$$

wo Π_1 eine simultane Invariante von u_n^2 und $(nn'x)^2$ mit beliebigen anderen Formen ist, in welcher die von $(nn'n'')^2$ freien Glieder in den Symbolen von u_n^2 bis zum Grade $l - 2\lambda$, in den Symbolen von $(nn'x)^2$ bis zum Grade λ ansteigen, ohne dass weitere Symbole von u_n^2 zu Symbolen von $(nn'x)^2$ zusammengezogen werden könnten.

Die dieser Gleichung in dem transformirten System Σ_1 entsprechende aber wird:

$$U_{M^{(1)}} \cdots U_{M^{(2l-3\lambda)}} \Pi_1 \left[\left((mm'u)^2 \right), (m_x^2) \right] = 0,$$

ein Ausdruck, der eine R_4^1-Mannichfaltigkeit von der Ordnung $l' = 2l - 3\lambda$ darstellt, welche $\lambda' = l - 2\lambda$ mal durch Φ_2^4 geht.

„Wenn eine Punkt- und eine R_4^1-Mannichfaltigkeit je eines der Systeme S und Σ, mit den Ordnungen l und l', die bezüglich λ und λ' mal die Gebilde F_2^4 und Φ_2^4 enthalten, in der Transformation T einander entsprechen, so bestehen zwischen den Zahlen $l, l' - \lambda, \lambda'$ die Gleichungen:

$$l' = 2l - 3\lambda \qquad l = 2l' - 3\lambda'$$
$$\lambda' = l - 2\lambda \qquad \lambda = l' - 2\lambda'$$

oder aufgelöst:

$$\lambda = \frac{2l - l'}{3} \qquad l = 2\lambda + \lambda'$$
$$\lambda' = \frac{2l' - l}{3} \qquad l' = 2\lambda' + \lambda.$$

Die Zahlen λ *und* λ' bezeichnet man (im engeren Sinne) als *„Charakteristiken"* des durch beide Mannichfaltigkeiten zusammen dargestellten Kegelschnittsystems.

Wir fügen an dieser Stelle noch die analogen Gleichungen an, welche sich auf in der Transformation T einander entsprechende *einfach ausgedehnte* Mannichfaltigkeiten der Systeme S und Σ beziehen.

Wir bezeichnen mit q die Ordnung einer Curve des Systems S, mit δ die Zahl der Punkte, in welchen sie die Fläche F_2^4 trifft; und mit denselben Buchstaben, aber gestrichelt, die dualistischen Charaktere, welche der jener Curve im System Σ entsprechenden Mannichfaltigkeit zugehören.

Dann erhält man unmittelbar, wenn man bedenkt, dass einer linearen Punktmannichfaltigkeit von S in Σ eine Φ_2^4 enthaltende quadratische R_4^1-Mannichfaltigkeit (zufolge der Gleichung (3) § 4) zugeordnet ist, und umgekehrt, und dass die Zahl der beweglichen Schnittelemente mit den in T einander entsprechenden einfach ausgedehnten Mannichfaltigkeiten beiderseits gleich sein muss, die Relationen

$$2q - \delta = q'$$
$$q \qquad = 2q' - \delta'.$$

Die Zahlen q und q' nennen wir wiederum, wie gebräuchlich, „*Charakteristiken*“ der durch beide Mannichfaltigkeiten zusammen vorgestellten einfach ausgedehnten Kegelschnittschaar.

Es ist q die Zahl der Kegelschnitte derselben, welche als Curven 2. Classe aufgefasst, auf einer gegebenen Curve 2. O. ruhen, oder eine gegebene Gerade berühren; q' die Zahl der Curven 2. O. der Schaar, welche eine gegebene Curve 2. Cl. stützen, oder durch einen gegebenen Punkt gehen.

Beiläufig ergiebt sich, dass jede auf L^3 verlaufende Curve die Fläche F_2^4 in einer geraden Zahl von Punkten treffen muss, da im anderen Falle Φ_2^4 eine R_1^1-Schaar ungerader Ordnung tragen könnte, was unmöglich ist.

7.

Das Unbestimmt-Werden der Transformation T für Punkte vierfach ausgedehnter Mannichfaltigkeiten.

Wir gehen nun dazu über, zu untersuchen, wie die Umgebung eines Punktes P einer vierfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_4 durch die Transformation T aufgelöst wird, wenn derselbe in der Fläche F_2^4 liegt.

Bezeichnen wir die transformirte Mannichfaltigkeit durch M_4', so werden wir sagen können, dass dem Punkte P von M_4 Elemente von M_4' entsprechen, welche der Tangentialebene Π von F_2^4 im Punkte P angehören; nicht aber wird auch umgekehrt jedem R_4^1 von Π als einem Element von M_4' in der Transformation T der Punkt P zugeordnet sein; nämlich im Allgemeinen solchen Räumen nicht, welche zugleich der Mannichfaltigkeit Φ_2^4 angehören (§ 5).

Wir wollen nun zwischen den Π angehörigen Elementen von M_4', welche durch Auflösung des Punktes P entstehen, und denen, bei welchen dieses nicht der Fall ist, einen Unterschied machen, und denjenigen Theil von M_4', welcher durch die Transformation T aus der Umgebung des Punktes P von M_4 entstanden ist, durch Einschliessung in eckige Klammer kenntlich machen, also durch das Zeichen $[M_4']$ darstellen.

Dann gibt über das Verhalten eines beliebigen Raumes R_4^1 von Π als eines Elementes von $[M_4']$ der folgende Satz Auskunft:

1. *Zerfällt der Tangentialkegel einer Mannichfaltigkeit M_4, welche λ mal die Fläche F_2^4 enthält, in einem Punkte P dieser Fläche in zwei Theile (ε_1) und (ε_2) von den Ordnungen ε_1 und ε_2, von welchen der erste (ε_1) von ∞^1 Räumen R_3^1 beschrieben werden kann, die durch die Tangentialebene Π von F_2^4 im Punkte P gehen, während dies bei dem zweiten nicht der Fall ist; wo hingegen der Kegel (ε_2) η einzelne Räume R_3^1 trägt, welche durch Π gehen* (jeden mit der gehörigen Multiplicität gerech-

net) — *so ist der ganze* R_4^1*-Bündel* Π *in der transformirten Mannichfaltigkeit* $[M_4']$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda$ *mal enthalten; er wird von* $[M_4']$ *„ausserdem“ in einer einfach ausgedehnten Schaar von der Gesammtordnung* ε_1 *„geschnitten“,*) welche der den Kegel* (ε_1) *erfüllenden* R_3^1*-Schaar in dem* (§ 5 betrachteten) *Polarsystem der zu* Π *gehörigen* R_4^1*-Schaar* $\varkappa^2$ *von* Φ_2^4 *entspricht, und trägt* η *einzelne „Knotenelemente“**) von* $[M_4']$, *welche jenen* η *einzelnen Räumen in demselben Polarsystem zugeordnet sind.*

Der Beweis des *ersten Theiles* unseres Satzes ergibt sich unmittelbar, wenn wir durch einen festen Raum A der Ebene Π, der weder Φ_2^4 angehört, noch gegenüber $[M_4']$ eine ausgezeichnete Lage hat, einen R_4^1-Büschel legen. Die Zahl der beweglichen gemeinsamen Elemente dieses Büschels und der Mannichfaltigkeit M_4' gibt dann, von der Ordnung l' von M_4' abgezogen, die Multiplicität von A als eines Elementes von M_4', oder, was in diesem Falle dasselbe ist, von $[M_4']$.

Diese Zahl muss aber gleich sein der Zahl der beweglichen, im Allgemeinen nicht auf F_2^4 gelegenen Schnittpunkte, in welchen ein durch P und zwei nicht ausgezeichnete andere Punkte von F_2^4 gehender Kegelschnitt die Mannichfaltigkeit M_4 trifft; also, wenn l die Ordnung von M_4 ist, gleich

$$2l - 2\lambda - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = l' - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda).$$

Um den *zweiten Theil* des obigen Satzes zu beweisen, betrachten wir alle Räume A eines R_4^1-Büschels a, dessen sämmtliche Räume durch Π gehen, verbinden dieselben mit einem nicht durch Π gehenden $R_4^1 : B$ durch Büschel AB, und suchen zu bestimmen, wie oft ausser den $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$ Schnitträumen mit M_4', welche für jede Lage des Büschels AB in den Raum A hineinfallen, *unabhängig von der Lage von* B weitere Coincidenzelemente von M_4' mit diesem Büschel in feste Räume A fallen. Wir haben behauptet, dass die Gesammtzahl der im Büschel a enthaltenen Räume dieser Art ε_1 ist, wenn man jeden so oft in Anschlag bringt, als seine Multiplicität als Element von $[M_4']$ die Zahl $(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \lambda)$ um eine Einheit übertrifft.

---

*) So wollen wir abkürzend sagen, wenn ein R_4^1, der einen Büschel der Ebene Π durchläuft, als Element von $[M_4']$ eine Gesammt-Multiplicitätserhöhung im Betrage ε_1 erfährt. Bei der Bestimmung dieser Zahl ist zu beachten, dass consecutive Räume unter Umständen verschiedene Multiplicitätserhöhungen erfahren können.

**) Dies soll heissen, dass die Gesammt-Multiplicitätserhöhung, welche einzelne Räume eines einzelnen R_4^1-Büschels von Π erfahren, wenn man dieses Büschel um einen festen R_4^1 sich drehen lässt, η beträgt. Ich habe beide Erläuterungen unter den Text gestellt, um in den Wortlaut des Satzes nicht allzuviele Erklärungen aufnehmen zu müssen.

Jedem der Büschel AB des Systems Σ entspricht nun in S ein Kegelschnitt, der durch P und zwei weitere Punkte von F_2^4 geht. Derselbe zerfällt in eine Sehne von F_2^4, welche P mit einem anderen Punkte dieser Fläche verbindet, und eine zweite Gerade, welche einen im Allgemeinen von P verschiedenen Punkt jener Sehne mit einem dritten Punkte von F_2^4 verbindet, sobald der Raum A in die zu Φ_2^4 gehörige R_4^1-Schaar $\varkappa^2$ von Π fällt.

Suchen wir zuerst die Schnittpunkte zu bestimmen, welche diese letztere Sehne absorbirt.

Den Räumen von $\varkappa^2$ entsprechen in dem System S alle Punkte des Kegels dritter Ordnung R_3^3, welcher F_2^4 aus dem Punkte P projicirt. Nehmen wir nun an, dass dieser Kegel δ mal auf M_4 enthalten ist, so folgt, dass in der transformirten Mannichfaltigkeit M_4 eine Multiplicitätserhöhung der Räume von $\varkappa^2$ gegenüber den übrigen Räumen von Π stattfindet, deren Betrag gleich

$$(\lambda' + \delta) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$$

ist, wo λ' angibt, wie oft M_4' durch Φ_2^4 geht. Denn die Zahl der beweglichen, im Allgemeinen weder auf jenem Kegel noch auf F_2^4 gelegenen Schnittpunkte der Geraden, welche dem Büschel BA in dem Falle eigentlich entspricht, wo A zu $\varkappa^2$ gehört — die Zahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit M_4 ist $l - \lambda - \delta$, eine Zahl, die nur dann eine Erniedrigung erfährt, wenn eine durch P gehende Ebene erster Art öfter als δ mal auf M_4 enthalten ist. Dieser Ausdruck, von l' abgezogen, gibt aber die Multiplicität von $\varkappa^2$, d. h. eines nicht weiter ausgezeichneten Raumes von $\varkappa^2$ als eines Elementes von M_4' gleich

$$l - 2\lambda + \delta = \lambda' + \delta.$$

Die hiermit ausgeführte Bestimmung der Multiplicität von $\varkappa^2$ in M_4' kommt jedoch für unseren nächsten Zweck nicht in Betracht; wir haben in dem Doppelten dieser Zahl gerade die für Räume A des Büschels a eintretende Multiplicitätserhöhung bestimmt, welche von *den* Theilen der Mannichfaltigkeit M_4' herrührt, die in der Transformation T *nicht* der Umgebung des Punktes P entsprechen, also — wiewohl sie mit $[M_4']$ zusammenhängen werden — nicht zu $[M_4']$ gehören.

Dagegen werden die ausserdem stattfindenden Multiplicitätserhöhungen, gleichgiltig, ob sie für Elemente von $\varkappa^2$ eintreten (oder vielmehr solchen unendlich benachbart sind), oder nicht, zu $[M_4']$ zu rechnen sein, da dieselben nur daher rühren können, dass Schnittpunkte der durch P gehenden Kegelschnitte mit M_4 von dem Punkte P selbst absorbirt werden.

Durchläuft nun der Raum A den Büschel a, so durchläuft die Tangente des dem Büschel $[BA]$ des Systems Σ im Systeme S ent-

sprechenden Kegelschnittes im Punkte P einen ebenen Strahlenbüschel; es gibt also unter diesen Kegelschnitten im Ganzen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ Curven, welche M_4 im Punkte P berühren. Aendern wir nun die Lage von B, so wird sich diese Kegelschnittschaar so ändern, dass die in P gezogenen Tangenten je zweier Curven derselben, die zu dem nämlichen Raum A gehören, mit Π durch einen und denselben Raum R_3^1 verbunden werden können (§ 5). Hierbei werden aber von den $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ Räumen A, welche bei der ersten Lage von B Berührungskegelschnitten entsprachen, nur diejenigen immer wieder Berührungskegelschnitten zugeordnet sein, welche im ersten Falle zu *solchen* Kegelschnitten gehörten, deren Tangenten ein durch Π gehender R_3^1 enthält, welcher ganz auf dem Tangentenkegel von M_4 im Punkte P liegt. Für diese Räume A allein ist die Zahl der Schnittelemente eines Büschels BA mit M_4', welche in A fallen, immer grösser als $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$, wie man auch B wählen möge, und sie allein sind daher Räume höherer Multiplicität. Ihre Gesammtzahl wird zufolge unserer Voraussetzung für allgemeine Lage des Büschels a gleich ε_1. Ebenso aber ergibt sich der *dritte Theil* unserer Behauptung. —

Der hiermit bewiesene Satz I setzt nur die Charakteristik λ als bekannt voraus; sein Inhalt ist von dem Werthe der zweiten Charakteristik λ', oder der Ordnung l der zu transformirenden Mannichfaltigkeit M_4 unabhängig, wie auch von vorne herein zu erwarten war, da es sich nur um eine Transformation der in der Umgebung *eines* Punktes P von M_4 gelegenen Punkte handelt.

Eine solche Unabhängigkeit findet nicht mehr statt, wenn es darauf ankommt, die Gesammtmultiplicität der Räume von Π als Elemente der ganzen Mannichfaltigkeit M_4' zu bestimmen, indem jetzt der Schaar $\varkappa^2$ angehörige Räume hinzutreten, welche die Transformation T in von P verschiedene Punkte überführt.

Heben wir aus den Daten der vorstehenden Entwickelung das hierauf bezügliche heraus, so können wir den folgenden Satz aufstellen, der eine Ergänzung des Satzes I enthält:

II. Sind bei einer Mannichfaltigkeit M_4 mit den Charakteristiken λ und λ' die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt; ist ferner der die Fläche F_2^4 aus P projicierende Kegel δ mal auf M_4 enthalten, und erfahren einzelne Ebenen dieses Kegels eine Multiplicitätserhöhung als Elemente von M_4, im Gesammtbetrag ξ — so ist die quadratische Mannichfaltigkeit $\varkappa^2$ von Φ_2^4, welche der Ebene erster Art Π von Λ^3 angehört, $\lambda' + \delta$ mal auf M_4' enthalten; und es finden, ausser der hierdurch etwa bedingten Multiplicitätserhöhung aller Elemente von $\varkappa^2$ gegenüber den übrigen, $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \lambda)$ mal auf M_4' enthaltenen Räumen von Π noch für ξ einzelne Elemente von $\varkappa^2$ Multiplicitätserhöhungen statt, welche jenen ξ Ebenen erster Art von L^3 entsprechen.

8.

Der Chasles'sche Satz.

Wie in § 2 bewiesen, kann eine zwei verschiedenen Systemen von Curven 2. Classe gemeinsame Curve $u_\alpha^2 = 0$ denselben nur dann scheinbar zugleich angehören, wenn ihre Covariante $(\alpha\beta x)^2$ identisch verschwindet. Ist dies der Fall, so hängt die Entscheidung, ob sie beiden Systemen wirklich, oder scheinbar zugleich angehöre, von der Bestimmung der Grenzwerthe dieser Covariante ab. Für unsere Parameterdarstellung hat dies die Bedeutung, dass nur ein auf F_2^4 gelegener Punkt, oder ein zu Φ_2^4 gehöriger Raum R_4^1 einen Kegelschnitt darstellen kann, welcher zwei Systemen scheinbar zugleich angehört; und dass weiter ein Punkt von F_2^4 eine beiden Systemen wirklich gemeinsame Curve repräsentirt, so oft ihm als einem Schnittpunkt der jene Systeme in S darstellenden Mannichfaltigkeiten auch ein gemeinsames Element der transformirten Mannichfaltigkeiten in Σ entspricht.

Zu entscheiden, wann dies eintritt, hat aber nach dem Vorausgeschickten hinsichtlich der Zusammenstellung einer einfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_1 und einer vierfach ausgedehnten M_4 keine Schwierigkeit mehr.

Nehmen wir zuvörderst an, die δ Schnittpunkte der Curve q^{ter} Ordnung M_1 und der Fläche F_2^4 seien alle getrennt. Dann geht aus Satz *I.* des vorigen § unmittelbar hervor, *dass von der Zahl der Schnittpunkte von M_1 mit der Mannichfaltigkeit l^{ter} Ordnung M_4, welche von einem beliebigen dieser Punkte P absorbirt werden, durch die Transformation T immer λ verloren gehen, wenn M_4 die Fläche F_2^4 λ mal enthält.*

Denn möge zunächst die Curve M_1 einfach durch P hindurchgehen, ohne mit M_4 dort eine Berührung zu haben, so dass nur $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ Schnittpunkte von M_1 und M_4 in P fallen. Dann entspricht derselben in dem Systeme Σ eine R_4^1-Mannichfaltigkeit, welche einen in Bezug auf $[M_4']$ nicht ausgezeichneten Raum von Π einfach enthält, dort aber nicht $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, sondern nur $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \lambda$ Elemente mit M_4' gemein hat. Ebenso viele Schnittpunkte verschwinden aber, wenn M_1 und M_4 einander in P in irgend einem Grade berühren; denn dies hat nur zur Folge, dass ebenso viele Schnitträume von M_1' und M_4', die zuvor nicht auf Π lagen, nun auf Π zu liegen kommen, als die Zahl der in P vereinigten Schnittpunkte von M_1 und M_4 die Zahl $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ übersteigt, theils in Folge dessen, dass nun M_1' durch Räume höherer Multiplicität von M_4' geht, theils deshalb, weil nun Berührungen von M_1 und M_4' dort stattfinden: in allen Fällen sind λ gemeinsame Elemente verschwunden.

Daran wird aber auch nichts geändert, wenn die δ vereinzelten Schnittpunkte von M_1 und F_2^4 zum Theil consecutiv werden, oder in mehrfache Punkte von M_1 zusammenrücken; so dass man unter allen Umständen nur $lq - \lambda\delta$, oder wenn man nach § 6 die Charakteristiken λ' und q' einführt, $lq' + \lambda' q$ Schnittpunkte erhält, welchen in der Transformation T' gemeinsame Elemente von M_1' und M_4' entsprechen; ein Resultat, das in der symmetrischen Form des Ausdrucks $\lambda q' + \lambda' q$ eine Bestätigung findet, da man natürlich von M_1' und M_4' ausgehend zu dem nämlichen Ergebniss gelangen muss.

Hiermit ist der Satz von Chasles bewiesen, und wir haben, um denselben in rein ternär-geometrischer Form aussprechen zu können, nur noch die entsprechende Bedeutung der Charakteristiken λ und λ' des vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems zu ermitteln.

Man erhält dieselbe unmittelbar, wenn man im Satze I des vorigen §. $\varepsilon_1 = \lambda$ und $\varepsilon_2 = 0$ setzt, was offenbar der Fall ist, der für die Punkte von F_2^4 im Allgemeinen eintritt: es wird λ gleich der Zahl der Kegelschnitte des vierfach ausgedehnten Systems, welche in einer Involution von Strahlenpaaren, als einer Kegelschnittschaar mit den Charakteristiken $q = 0$, $q' = 1$ enthalten sind; wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass diese Involution keine ausgezeichnete Lage gegen das gegebene Kegelschnittsystem besitzt.*)

Dem Chasles'schen Satze lässt sich hiernach der folgende Ausdruck geben:

„Wenn von den Kegelschnitten eines einfach ausgedehnten Systems q eine gegebene Gerade berühren, und q' durch einen gegebenen Punkt gehen; und wenn von den Curven eines vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems λ in einer gegebenen Involution von Strahlenpaaren, und λ' in einer gegebenen Involution von Punktepaaren liegen — dann gibt es

$$\lambda q' + \lambda' q$$

beiden Systemen gemeinsame Kegelschnitte, oder, im besonderen Falle, deren unendlich viele.“

9.

Der erweiterte Chasles'sche Satz und die Halphen'sche Symbolik.

Hat man nicht ein vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem mit einer einfach ausgedehnten Kegelschnittreihe, sondern fünf vierfach ausgedehnte Systeme zum Durchschnitt zu bringen, so braucht man

*) Bei der wirklichen Bestimmung der Zahl λ auf diesem Wege ist natürlich zu beachten, dass unter den Doppellinien des vierfach ausgedehnten Systems, welche etwa in eine Doppellinie der Involution fallen, diejenigen und nur diejenigen mitzuzählen sind, welche sich auch aus den Strahlenpaaren der Involution durch Grenzübergang ergeben.

nun nicht mehr neue Grenzbetrachtungen anzustellen, da es durch einen einfachen, schon von Chasles (C. R. t. 58 p. 297) angewandten, in unserem Zusammenhange zulässigen Schluss gelingt, diesen Fall auf den eben behandelten zurückzuführen.

Wir bedienen uns, indem wir die Chasles'sche Betrachtung an dieser Stelle reproduciren, einer zuerst in ähnlichem Sinne von Herrn Halphen (Comptes Rendus t. 76 p. 1074 oder Bulletin de la Société Mathém. de France t. 1. Année 1872—73 p. 236) gebrauchten Schreibart, derselben, die Herr Schubert seinem *„Kalkül der abzählenden Geometrie"* zu Grunde gelegt hat, und bezeichnen demnach die Zahl der Curven, in welchen sich mehrere in den Dimensionen geeignet gewählte Kegelschnittsysteme schneiden, durch das *Product* der Symbole, die wir für diese Systeme gebrauchen; wir bezeichnen also, wenn L_1, L_2, .. L_5 fünf beliebige einfach ausgedehnte Kegelschnitte sind, durch das Produkt $L_1 L_2 \,..\, L_5$ die Zahl der ihnen wirklich gemeinsam angehörenden Kegelschnitte; insbesondere, wenn μ und ν vierfach ausgedehnte Systeme sind, welche in Σ, bezüglich in S durch lineare Mannichfaltigkeiten repräsentirt werden, durch μ^5 die Zahl der Curven, in welchen sich fünf verschiedene Systeme von der Art μ durchdringen u. s. w.

Die fünf Systemen μ oder ν gemeinsamen Curven kann man sofort angeben. Ihre Anzahlen sind die folgenden:

I.

$$\mu^5 = 1, \quad \mu^4\nu = 2; \quad \mu^3\nu^2 = 4; \quad \mu^2\nu^3 = 4; \quad \mu\nu^4 = 2; \quad \nu^5 = 1.$$

Aus diesen Zahlen kann man aber leicht mit Hilfe des Chaslesschen Satzes die Zahl der Curven finden, in welchen sich ein beliebig gegebenes vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem L und vier Systeme μ, ν durchdringen; man hat nur zu berücksichtigen, dass die Charakteristiken q, q' eines einfach ausgedehnten Systemes Q als die Zahlen

$$q = Q\nu \qquad q' = Q\mu$$

definirt sind. Setzt man hier für Q der Reihe nach: μ^4, $\mu^3\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu\nu^3$, ν^4, so erhält man die Tabelle:

II.

$$\begin{aligned} L\mu^4 &= \lambda + 2\lambda' \\ L\mu^3\nu &= 2\lambda + 4\lambda' \\ L\mu^3\nu^2 &= 4\lambda + 4\lambda' \\ L\mu\nu^3 &= 4\lambda + 2\lambda' \\ L\nu^4 &= 2\lambda + \lambda', \end{aligned}$$

woraus die ebenfalls schon von Chasles angegebenen Relationen:

$$L(2\mu^4 - \mu^3\nu) = 0 \qquad L(2\nu^4 - \mu\nu^3) = 0$$
$$L(4\mu^4 + 4\nu^4 - 3\mu^2\nu^2) = 0\,.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man durch Wiederholung des obigen Schlusses die Charakteristiken der einfach ausgedehnten Systeme $L\mu^3$, $L\mu^2\nu \ldots$, und durch erneute Anwendung des Chasles'schen Satzes die Tabelle

III.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 \mu^3 &= \lambda_1\lambda_2 + 2(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 4\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \mu^2\nu &= 2\lambda_1\lambda_2 + 4(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 4\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \mu\nu^2 &= 4\lambda_1\lambda_2 + 4(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + 2\lambda_1'\lambda_2' \\
L_1 L_2 \nu^3 &= 4\lambda_1\lambda_2 + 2(\lambda_1\lambda_2' + \lambda_1'\lambda_2) + \lambda_1'\lambda_2',
\end{aligned}$$

woraus die bekannte Identität

$$L_1 L_2 (2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3) = 0$$

folgt. So fortfahrend erhält man ferner die Tafeln

IV.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 \mu^2 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + 4\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' \\
L_1 L_2 L_3 \mu\nu &= 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + 2\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' \\
L_1 L_2 L_3 \nu^2 &= 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3' + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'
\end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 L_4 \mu &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
&\quad + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4' + 2\lambda_1'\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
L_1 L_2 L_3 L_4 \nu &= 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4' \\
&\quad + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'
\end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned}
L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5' + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4'\lambda_5' \\
&\quad + 4\,\Sigma\lambda_1\lambda_2\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5' + 2\,\Sigma\lambda_1\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5' + \lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_4'\lambda_5'
\end{aligned}$$

Die Schlussformel, die alle früheren einschliesst, ist der gesuchte Ausdruck, welcher die Zahl der fünf beliebigen Kegelschnittsystemen gemeinsamen Curven angiebt. Er liefert z. B. die Zahl der Kegelschnitte einer Ebene, welche irgend fünf gegebene Curven berühren, wenn man λ_i die Classe, λ_i' die Ordnung der i^{ten} Curve bedeuten lässt — wie sich sofort aus der im vorigen § angegebenen Bestimmungsart der Charakteristiken λ und λ' ergiebt.

Dem letzten Ausdruck hat Herr Halphen eine bemerkenswerthe symbolische Form gegeben, deren Nothwendigkeit wir nunmehr von vornherein einsehen können. *Man kann nämlich, nachdem diese Formel einmal auf algebraischem Wege abgeleitet ist, die Bemerkung machen, dass dieselbe, da sie nur von den Charakteristiken der einzelnen Systeme abhängt, dem Princip der „Erhaltung der Anzahl" unterworfen ist, d. h. dass sie denselben Werth, wie zuvor an-*

gibt, wenn man an Stelle der gegebenen Systeme beliebige andere einführt, sobald diese nur die nämlichen Charakteristiken haben.

Wählt man insbesondere reducibele Systeme, so dass das gegebene System L_i durch die Systeme L_i', L_i'' . . . . zusammengenommen vertreten wird, so erhält man nach dem Vorstehenden die Zahl der den Systemen $L_1 \ldots L_5$ gemeinsamen Curven, wenn man in Bezug auf jedes der Systeme L_i, L_k, . . auf alle möglichen Arten je eines der dieselben vertretenden Theilsysteme $L_i^{(m)}$, $L_k^{(n)}$ . . . herausgreift, die Zahl der diesen Gruppen gemeinsam angehörigen Curven bestimmt, und von allen diesen Zahlen die Summe bildet. Dies wird aber nur anders ausgedrückt, wenn man sagt: „Man bilde für jedes System die „symbolische" Summe

$$L_i' + L_i'' + L_i''' + \ldots .,$$

multiplicire alle so entstandenen Summen mit einander, und ersetze nachher die Producte $L_1^{(m)}\ L_2^{(m')}$ . . $L_5^{(n)}$ durch die Zahl der Curven, welche die Systeme $L_1^{(m)}$, $L_2^{(m')}$ . . $L_5^{(n)}$ mit einander gemein haben."

Die einfachste Art, wie man ein System L durch elementare Systeme mit denselben Charakteristiken λ und λ' ersetzen kann, ist nun offenbar die, dass man λ Systeme μ und λ' Systeme ν benutzt. Wir setzen also, mit Rücksicht auf Fragestellungen der vorliegenden Art:

$$L = \lambda\mu + \lambda'\nu$$

ein Ausdruck, den wir mit Herrn Halphen als den „*Modul*" des Systems L bezeichnen.

Führt man diesen Ausdruck ein, so erhält man statt der Formel VI die folgende:

$$L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 = \prod_1^5{}_i (\lambda_i\mu + \lambda_i'\nu)$$

eine Formel, die, wenn man sie ausrechnet, d. h. wenn man die Producte der μ und ν durch die in Tafel I. angegebenen Zahlen ersetzt, wieder in den Ausdruck VI übergeht.

Ebenso kann man aber auch jedes einfach ausgedehnte System durch einen „Modul" ersetzen, d. h. durch ein einfachstes zerfallendes System, welches dieselben Charakteristiken hat: man kann unmittelbar

$$Q = q \,.\, \sigma + q' \,.\, \tau$$

schreiben, wo σ eine Involution von Punktepaaren einer Geraden, τ eine Involution von Strahlenpaaren eines Punktes ist, und erhält dann den Satz von Chasles ausgedrückt durch oie Formel:

$$LQ = (\lambda\mu + \lambda'\nu)(q\sigma + q'\tau)$$

wo bei der Ausrechnung

$$\mu\sigma = 0 \qquad \nu\tau = 0 \qquad \mu\tau = 1 \qquad \nu\sigma = 1$$

zu setzen ist.

10.

Die Beweglichkeit der Lösungen. Beispiel.

Die Fälle, in welchen die Beweglichkeit der Lösungen des Charakteristikenproblems eine Reduction erfahren kann, lassen sich mit Hilfe der oben eingeführten Parameterdarstellung leicht übersehen.

Beschränken wir uns auf den wichtigsten Fall, wo im Systeme S eine Curve M_1 mit einer vierfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit M_4 zum Durchschnitt zu bringen ist.

Dann ist ohne Weiteres einleuchtend, dass ein der Fläche F_2^4 nicht benachbarter Punkt von M_1, welcher auf M_4 liegt, eine bewegliche Lösung des Charakteristikenproblems darstellen muss, da man jeden Punkt des senären Gebietes der nicht auf L^3 liegt, und jeden Punkt von L^3, der nicht zu F_2^4 benachbart ist, noch auf unendlich viele Arten durch eine der Collineationen, die L^3 in sich transformiren, in jeden anderen Punkt gleicher Art überführen kann. Ebenso kann auch jeder Schnittpunkt, welcher einem Punkte P von F_2^4 benachbart ist, aber weder auf F_2^4 noch auf L^3 liegt, durch eine lineare Transformation beseitigt werden, da nicht alle Fortschreitungsrichtungen, die von Punkten von F_2^4 ausgehen, zu M_4 gehören können; desgleichen lassen sich alle wirklichen Lösungen entfernen, die durch Punkte von F_2^4 absorbirt werden, welche als Elemente von M_4 eine die Zahl λ übersteigende Multiplicität besitzen. Derselbe Schluss kann ferner gemacht werden, wenn die Curve M_1 in einem Punkte P von F_2^4 den Raum L^3 berührt, d. h. wenn sie, die etwa in P $\varkappa$ Punkte mit F_2^4 gemein hat, L^3 dort in mehr als $2\varkappa$ Punkten trifft, M_4 aber den Raum L^3 nicht zugleich längs der ganzen Fläche F_2^4 berührt.

Tritt aber dieser letztere Umstand ein, enthält also der Tangentialkegel von M_4 in einem beliebigen Punkte von F_2^4 den Tangentialkegel von L^3 immer als Theil, und berührt gleichzeitig die Curve M_1 den Raum L^3 in einem Punkte von F_2^4, so ist wenigstens einer der daher rührenden Schnittpunkte von M_1 und M_4 auf keine Weise durch lineare Transformation zu entfernen, da natürlich bei jeder Transformation der Gruppe, welche L^3 in sich überführt, die Tangentialkegel von L^3 in den Punkten von F_2^4 in einander übergehen.

In diesem Falle, und in diesem allein, wird also eine Verringerung der Beweglichkeit der Lösungen eintreten.

Einer Geraden des Systems S, welche L^3 in einem Punkte von F_2^4 berührt, entspricht aber im System Σ ein R_4^1-Büschel, welcher mit Λ^3 in einem Raume von Φ_2^4 einen Contact hat*), und beiden zu-

*) Allgemeiner entspricht einem Curvenzweig, welcher in einem Punkte P mit F_2^1 $\varkappa$ Punkte, und mit L^3 ausser den hierdurch absorbirten $2\varkappa$ Schnittpunkten noch $\varkappa'$ weitere gemein hat, im System Σ eine R_4^1-Schaar, welche mit Φ_2^4

sammen entspricht im ternären Gebiet ein Büschel, oder, was in diesem Falle dasselbe ist, eine Schaar von einander vierpunktig berührenden Kegelschnitten, welche die dritte Kegelschnittausartung enthält, die als Curve 2. Ordnung aufgefasst aus einer doppelt zählenden Geraden, und als Curve 2. Classe aus einem doppelt zählenden, auf jener Geraden enthaltenen Punkt besteht. Wir können daher das letzte Resultat geometrisch so ausdrücken:

„Die Lösungen des Charakteristikenproblems sind dann und nur dann alle beweglich, wenn entweder das einfach ausgedehnte System keinen, oder das vierfach ausgedehnte System nicht jeden der ∞^3 ausgearteten Kegelschnitte der dritten Art enthält.“

In den anderen Fällen treten in dem einfach ausgedehnten System unbewegliche Lösungen auf, deren Zahl in jedem einzelnen Falle durch eine besondere Untersuchung bestimmt werden muss, die z. B. so ausgeführt werden kann, wie es Herr Halphen angegeben hat.

Es hat dieses Auftreten unbeweglicher Curven für die wirkliche Auffindung der Lösungen des Charakteristikenproblems dieselben Erleichterungen im Gefolge, welche überhaupt in der Algebra durch den Umstand herbeigeführt werden, dass man von einer aufzulösenden Gleichung von vorne herein weiss, dass dieselbe mit einer anderen Gleichung eine gewisse Anzahl gemeinschaftlicher Wurzeln besitzt. —

Wir wollen nun zum Schluss die bisher in abstracto behandelten Verhältnisse an einem *Beispiele* näher ausführen, und die Gleichungen wirklich aufstellen, von deren Auflösung die Auffindung der einigen einfach gebauten Kegelschnittsystemen wirklich gemeinsamen Curven abhängt.

Als vierfach ausgedehntes Kegelschnittsystem nehmen wir dasjenige, dessen Curven mit zwei fest gegebenen Punkten (oder allgemeiner: Curven 2. Classe) x und y eine absolute Invariante haben, welche zu der absoluten Invariante desselben Kegelschnittes mit zwei gegeben vorliegenden Geraden u und v (die man auch durch Curven 2. Ordnung ersetzen kann) in einem constanten Verhältnisse steht; wir betrachten also, wenn $a_x^2 = 0$ die Punktgleichung, $u_\alpha^2 = 0$ die Liniengleichung eines und desselben Kegelschnittes ist, so dass

$$a_\alpha a_x u_\alpha - \frac{1}{3} u_x \cdot a_\alpha^2 \equiv 0,$$

das Kegelschnittsystem, dessen Gleichung:

$$\frac{(a_x a_y)^2}{a_x^2 . a_y^2} = c \frac{(u_\alpha v_\alpha)^2}{u_\alpha^2 . v_\alpha^2}$$

$\varkappa'$ Räume, und mit Λ^3 $\varkappa$ diesen consecutive Räume gemein hat. Die Zahlen $\varkappa'$ und $\varkappa$ decken sich mit den Begriffen der „Ordnung“ und „Classe“ des ausgearteten Kegelschnittes bei Halphen.

oder, nach Beseitigung des Nenners:

$$(1) \qquad (a_x a_y)^2 \cdot u_\alpha^2 \cdot v_\alpha^2 - c \cdot a_x^2 \cdot a_y^2 \cdot (u_\alpha v_\alpha)^2 = 0$$

ist, also ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken $\lambda = \lambda' = 2$.

Dasselbe gehört im Allgemeinen nicht zu denjenigen, welche jeden ausgearteten Kegelschnitt der dritten Art enthalten, denn die Gleichung (1) wird im Allgemeinen nicht identisch erfüllt, wenn man darin

$$a_x^2 = (\xi \eta x)^2 \qquad u_\alpha^2 = u_\xi^2$$

setzt. Dies tritt aber ein, sobald $c = 1$, und wir haben daher in der Gleichung

$$(2) \qquad (a_x a_y)^2 \cdot u_\alpha^2 v_\alpha^2 - a_x^2 \cdot a_y^2 \cdot (u_\alpha v_\alpha)^2 = 0,$$

welche den besonderen Fall vorstellt, wo die absoluten Invarianten geradezu gleich sind, ein Beispiel eines jener ausgezeichneten Kegelschnittsysteme, und zwar offenbar das einfachste von allen, da λ und λ' für diese Systeme wenigstens den Werth 2 haben muss.*)

Diese Systeme nun wollen wir mit einem Kegelschnittbüschel und einigen ausgezeichneten Ausartungen desselben zum Durchschnitt bringen.

Ein Kegelschnittbüschel wird dargestellt durch eine Gleichung von der Form:

$$(3) \qquad \alpha_t a_x^2 = 0$$

wo t ein binärer Parameter ist, und, nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise, erst Symbole α mit Symbolen a multiplicirt reelle Bedeutung erlangen. Die cubische Gleichung, von welcher die Linienpaare des Büschels abhängen, ist

$$\mathsf{A}_t^3 = \alpha_t \alpha_t' \alpha_t'' (a a' a'')^2 = 0$$

und hat die Discriminante $R = (\Delta\Delta')^2$, wenn wir mit Δ_t^2 die Hesse'sche Covariante $(\mathsf{A}\mathsf{A}')^2 \mathsf{A}_t \mathsf{A}_t'$ von A_t^3 bezeichnen.

R ist im allgemeinen Falle von Null verschieden, und von der Liniengleichung des Kegelschnittes (3): $\alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2$ sondert sich kein binär-linearer Factor ab: man erhält durch Substitution der Form (3) in die Gleichung (1) [oder (2)] eine irreducibele Gleichung 6^{ten} Grades für t:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_t a_x a_y)^2 \cdot \alpha_t \alpha_t' (a a' u)^2 \cdot \alpha_t \alpha_t' (a a' v)^2 \\ &- c \cdot \alpha_t a_x^2 \cdot \alpha_t a_y^2 \cdot [\alpha_t \alpha_t' (a a' u)\ (a a' v)]^2 = 0 \end{aligned}$$

entsprechend dem Chasles'schen Satze, da die Charakteristiken des allgemeinen Kegelschnittbüschels $q = 2$, $q' = 1$ sind.

---

*) Es ist dieses Beispiel von dem von Herrn Halphen angegebenen nicht wesentlich verschieden.

Bei einem Büschel von Kegelschnitten dagegen, welcher eine doppelt zählende Gerade enthält und zugleich eine Kegelschnittschaar ist, haben wir $q = 1$, $q' = 1$; wir können nach dem Chasles'schen Satze nur 4 wirkliche Lösungen erhalten, und es muss sich daher von jener Gleichung 6^{ten} Grades ein quadratischer Factor abscheiden (der die nun auftretenden scheinbaren Lösungen angiebt).

In der That haben wir in diesem Falle $R = 0$ anzunehmen, es wird Δ_t^2 ein Quadrat, gleich $(\Delta_t)^2$, und von der Liniengleichung des Kegelschnittbüschels muss sich der Factor Δ_t absondern, so dass wir

$$\alpha_t \alpha_t' (a\, a'\, u)^2 \equiv \Delta_t \,.\, \beta_t u_b^2$$

setzen können. $(\Delta\alpha) a_x^2 = 0$ wird nun die Gleichung der Doppellinie des Büschels, $(\Delta\beta) u_b^2 = 0$ die Gleichung des Punktepaares, welches jener Doppellinie als Curve 2. Classe zugeordnet ist.

Führen wir diese Voraussetzungen in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$(\Delta_t)^2 \left[(\alpha_t a_x a_y)^2 \beta_t u_b^2 \,.\, \beta_t v_b^2 - c \,.\, \alpha_t a_x^2 \,.\, \alpha_t a_y^2 (\beta_t u_b v_b)^2\right] = 0,$$

es scheidet sich also in der That der Factor $(\Delta_t)^2$ ab, und es bleibt nur noch eine Gleichung 4^{ten} Grades zur Bestimmung der beiden Systemen wirklich gemeinsamen Curven aufzulösen.

Ein analoges Ergebniss erhalten wir, wenn wir weiterhin die Annahme einführen, dass wir einen Büschel einander vierpunktig berührender Curven vor uns haben. Es wird dann $\Delta_t^2 = 0$, A_t^3 eine dritte Potenz, $= (A_t)^3$, und es ist $\alpha_t \alpha_t' (a\, a'\, u)^2 \equiv A_t \,.\, \gamma_t u_c^2$ zu setzen. Es scheidet sich jetzt der Factor A_t^2 ab, und wir erhalten wiederum eine Gleichung vierten Grades. Von dieser können wir aber jetzt, in dem Falle, wo $c = 1$, eine Wurzel von vorn herein angeben, denn es ist nun die Gleichung der Curve 2. Classe der Schaar: $(A\gamma) u_c^2 = 0$, welche der Doppellinie $(A\alpha) a_x^2 = 0$ des Büschels (1) entspricht, ein Quadrat geworden, A ist also eine Wurzel der Gleichung:

$$(\alpha_t a_x a_y)^2 \gamma_t u_c^2 \,.\, \gamma_t v_c^2 - \alpha_t a_x^2 \,.\, \alpha_t a_y^2 (\gamma_t u_c v_c)^2 = 0$$

und es bleibt nur noch eine Gleichung *dritten Grades* aufzulösen, welche allein die *beweglichen* Schnittcurven beider Systeme angiebt.

Sei endlich der Kegelschnittbüschel in eine *Involution* von Strahlenpaaren ausgeartet. Dann wird auch $A_t^3 \equiv 0$, und es ist

$$\alpha_t \alpha_t' (a\, a'\, u)^2 \equiv C_t^2 \,.\, u_\xi^2$$

zu setzen, wo C_t^2 die binäre Form 2. Ordnung ist, deren Nullpunkte die Doppelelemente der Involution angeben, und ξ den Scheitel des Strahlenbüschels vorstellt, welchem die Linienpaare derselben angehören.

Durch Einführung dieser Voraussetzungen in die Gleichung (4) erhält man jetzt:

$$(C_t^2)^2 \,.\, u_\xi^2 v_\xi^2 \left[(\alpha_t a_x a_y)^2 - c \,.\, \alpha_t a_x^2 \,.\, \alpha_t a_y^2\right] = 0.$$

Es bleibt also nur noch eine *quadratische* Gleichung für t, entsprechend dem Werthe 2 der Charakteristik λ. Diese Gleichung reducirt sich, sobald $c = 1$ wird, ebenfalls auf $C_t^2 = 0$, da der Ausdruck in der Klammer, der von ξ ganz unabhängig ist, alsdann die Form

$$(a_x a_y)^2 - a_x^2 \cdot a_y^2$$

annimmt, und daher für jede Doppellinie, aber nicht für jedes Linienpaar identisch verschwindet.

Das Kegelschnittsystem (2) *hat also mit jeder Involution von Punktepaaren oder Strahlenpaaren nur deren Doppelelemente gemein.*

Es ist ersichtlich, dass eine Theorie, welche den Begriff der eigentlichen Lösung des Charakteristikenproblems von der Beweglichkeit derselben abhängig macht, den Charakteristiken λ und λ' eines vierfach ausgedehnten Systems die einfache Deutung, welche dieselben hier gefunden haben, wenigstens allgemein nicht geben kann, da die Involution von Strahlen- und Punktepaaren gerade solche Systeme von Kegelschnitten sind, für welche, — soferne man sie überhaupt zulassen will — *der Chasles'sche Satz in der Auffassung jener Theorie keine allgemeine Geltung mehr hat.*

Meine auf zwei- und dreifach ausgedehnte Kegelschnittsysteme bezüglichen Untersuchungen habe ich in die vorstehende Arbeit nicht mit aufgenommen, da es mir bis jetzt nicht gelungen ist, dieselben in ähnlich allgemeiner Weise durchzuführen, wie es bei den vierfach ausgedehnten Systemen, zu deren Behandlung das Bézout'sche Theorem ausreichte, noch möglich war.

Es mögen aber wenigstens einige Bemerkungen hier eine Stelle finden, welche sich auf den Satz von Cremona beziehen, der für die Zusammenstellung eines zweifach- und eines dreifach ausgedehnten Systems dasselbe leistet, was der Chasles'sche Satz für ein- und vierfach ausgedehnte Systeme. Dieser Satz sagt in seiner ursprünglichen Form aus, dass die Zahl der „Kegelschnitte, in welchen sich ein dreifach ausgedehntes System M und ein zweifach ausgedehntes N durchdringen" durch einen dreigliedrigen Ausdruck dargestellt wird, welcher sich aus zwei Reihen von „Charakteristiken" bilinear zusammensetzt, von welchen die erste nur von den Eigenschaften des Systems M, die zweite nur von denen des Systems N abhängt.

Es steht von vorn herein zu vermuthen, dass dieser Satz durch die Einführung des Begriffes der vollständigen Form eine ebenso allgemein giltige Deutung erfahren werde, als wir in Betreff des Chasles'schen Satzes gesehen haben; und in der That verhält es sich so.

Zugleich ergiebt sich eine einfache, bisher, wie es scheint, nicht bemerkte geometrische Deutung des Cremona'schen Satzes, ähnlich der § 9 der vorstehenden Arbeit hinsichtlich des Chasles'schen Satzes angegebenen; und in ihrer Begleitung eine Moduldarstellung der zweifach ausgedehnten Systeme, welche der von Herrn Halphen für die dreifach ausgedehnten Systeme aufgestellten analog ist.

Für den Fall, dass das drei- und das zweifach ausgedehnte System vollständige Durchschnitte von zwei, bezüglich drei vierfach ausgedehnten Systemen sind, ist der Nachweis der ersteren Behauptung als durch die Formel VI des § 9 der vorstehenden Abhandlung bereits erbracht anzusehen, da es natürlich gleichgiltig ist, in welcher Reihenfolge man die fünf vierfach ausgedehnten Systeme, welche in diese Formel eintreten, zum Durchschnitt bringt. Der andere Fall aber, in welchem diese besondere Voraussetzung nicht erfüllt ist, lässt sich auf den ersten zurückführen,

da man jede Mannichfaltigkeit M oder N durch Hinzufügung geeigneter Mannichfaltigkeiten gleicher Dimension zu einem vollständigen Durchschnitt ergänzen kann, und hier, was für das Ganze gilt, wie nicht schwer zu sehen, auch für die einzelnen Theile gelten muss.

Die in der Cremona'schen Formel auftretenden Charakteristiken besitzen eine ähnlich einfache geometrische Bedeutung, wie die des Chasles'schen Satzes; und zwar erhält man, wenn man die in § 7 der vorstehenden Arbeit angegebenen Sätze auf Systeme M und N in den einfachen, hier in Betracht kommenden Fällen ausdehnt, den Satz von Cremona in der folgenden Form:

„Sei r die Zahl der Strahlenpaare eines dreifach ausgedehnten Systems M, welche ihren Scheitel in einem gegebenen Punkt haben; s die Zahl der Kegelschnitte desselben, welche ein gegebenes Poldreieck haben; r' die Zahl der Punktepaare desselben, welche auf einer gegebenen Geraden liegen —

ferner n die Zahl der Kegelschnitte eines zweifach ausgedehnten Systems N, welche (als Curven 2. Cl. aufgefasst) *sich auf einen Büschel von Curven 2. O. stützen, oder insbesondere zwei gegebene Gerade berühren; l die Zahl der Kegelschnitte des Systems N, in Bezug auf welche ein gegebener Punkt und eine gegebene Gerade Pol und Polare sind, oder welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren; endlich n' die n dualistisch gegenüberstehende Anzahl.*

Dann ist die Zahl der beiden Systemen gemeinsamen Curven, so lange sie überhaupt endlich ist, gleich:

$$rn' - (r - s + r')\,l + r'n$$
$$\equiv r(n' - l) + sl + r'(n - l).$$

Die Zahlen r, s, $r' - n$, l, n' die wir als *„Charakteristiken"* der Systeme M und N bezeichnen, werden mit den gewöhnlich als Charakteristiken gebrauchten Zahlen durch die Relationen verbunden:

$$\begin{aligned} N\mu^2 &= n' \\ N\mu\nu &= 2l \\ N\nu^2 &= n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M\mu^3 &= s + 3r' \\ M\mu^2\nu &= 2s + 2r' \\ M\mu\nu^2 &= 2s + 2r \\ M\nu^3 &= s + 3r, \end{aligned}$$

aus welch' letzteren die Identität:

$$M(2\mu^3 - 3\mu^2\nu + 3\mu\nu^2 - 2\nu^3) \equiv 0$$

nunmehr in allgemeiner Weise sich ergiebt. Umgekehrt erhält man:

$$s = -\frac{1}{8} M(2\mu^3 - 3\mu^2\nu - 3\mu\nu^2 + 2\nu^3),$$

$$r = \frac{1}{4} M(2\nu^3 - \mu\nu^2), \qquad r' = \frac{1}{4} M(2\mu^3 - \mu^2\nu),$$

Ausdrücke, die im Falle M der vollständige Durchschnitt zweier vier-

fach ausgedehnter Systeme L_1, L_2 ist (wofür wir $M = L_1 L_2$ schreiben), die folgenden einfachen, auch direct leicht abzuleitenden Relationen ergeben:

$$s - r - r' = 2(\lambda_1 \lambda_2' + \lambda_2 \lambda_1')$$
$$r = \lambda_1 \lambda_2 \qquad r' = \lambda_1' \lambda_2' \text{ *).}$$

Für zwei- und dreifach ausgedehnte Systeme liefert der Cremona'sche Satz ähnliche *Moduldarstellungen*, wie wir sie in § 9 hinsichtlich der ein- und vierfach ausgedehnten Systeme kennen lernten.

Führen wir diese ein, so können wir alle in dem Charakteristikenproblem der Kegelschnitte einbegriffenen Fragestellungen durch einen einzigen Satz beantworten.

Wir fügen zu diesem Behufe zu den § 9 benutzten Bezeichnungen noch die folgenden:

Es sollen μ^2, ν^2 resp. die dreifach ausgedehnten Systeme bezeichnen, welche der vollständige Schnitt je zweier Systeme μ und ν sind, $\frac{\mu\nu}{2}$ das System von Kegelschnitten, welche eine gegebene Gerade als Polare eines gegebenen Punktes haben; α soll das Kegelschnittsystem bedeuten, das von allen Punktepaaren einer Geraden, α' dasjenige, welches von allen Strahlenpaaren eines Punktes gebildet wird; endlich sei β das System aller Kegelschnitte, welche ein gegebenes Poldreieck besitzen.

Dann ist mit Bezug auf diese und die § 9 der voranstehenden Arbeit eingeführten Bezeichnungen für vier-, drei-, zwei- und einfach ausgedehnte Kegelschnittsysteme L, M, N, Q:

I.

$$\lambda = L\tau \qquad \lambda' = L\sigma$$
$$(1) \qquad L = \lambda\mu + \lambda'\nu.$$

II.

$$r = M\alpha' \qquad s = M\beta \qquad r' = M\alpha$$
$$(2) \qquad M = r\mu^2 + (s - r - r')\frac{\mu\nu}{2} + r'\nu^2.$$

---

*) Eine besonders symmetrische Form nimmt der Satz von Cremona an, wenn man für r, s, r' neue Charakteristiken einführt, die durch die Gleichungen:

$$b = r + r' \qquad a = s - r \qquad a' = s - r'$$

definirt sind, und von welchen die letzteren die Zahlen der Punktepaare, bezüglich Strahlenpaare des Systems M darstellen, welche einen festen Punkt, bezüglich eine feste Gerade enthalten. Es wird alsdann, wenn man noch s_1 für $\frac{1}{2}(a + b + a')$, und σ_1 für $\frac{1}{2}(n + l + n')$ schreibt,

$$MN = (s_1 - a)\,n' + (s_1 - b)\,l + (s_1 - a')\,n$$
$$\equiv a\,(\sigma_1 - n') + b\,(\sigma_1 - l) + a'\,(\sigma_1 - n).$$

III.

$$n = N\nu^2 \qquad l = N\frac{\mu\nu}{2} \qquad n' = N\mu^2$$

$$N = (n-l)\,\alpha + l\beta + (n'-l)\,\alpha'. \tag{3}$$

IV.

$$q = Q\nu \qquad q' = Q\mu$$

$$Q = q\sigma + q'\tau \tag{4}$$

Um nun die Zahl der Curven zu bestimmen, in denen sich irgend welche, in den Dimensionen passend gewählte Kegelschnittsysteme durchdringen, multiplicire man die durch die Gleichungen (1), (2), (3), (4) *gegebenen Moduln derselben mit einander, und ersetze dann die Producte der* μ, ν, α, β, σ, τ *bezüglich durch die Werthe:*

$$\begin{array}{lll} \mu^5 = 1 & \mu^4\nu = 2 & \mu^3\nu^2 = 4 \\ \mu^2\nu^3 = 4 & \mu\nu^4 = 2 & \nu^5 = 1 \\ \alpha\mu^2 = 0 & \alpha\mu\nu = 0 & \alpha\nu^2 = 1 \\ \beta\mu^2 = 1 & \beta\frac{\mu\nu}{2} = 1 & \beta\nu^2 = 1 \\ \alpha'\mu^2 = 1 & \alpha'\mu\nu = 0 & \alpha'\nu^2 = 0 \end{array}$$

$$\sigma\mu = \tau\nu = 0 \qquad \sigma\nu = \tau\mu = 1.$$

Hinsichtlich der *Beweglichkeit der Lösungen* ist mit Bezug auf die Cremona'sche Formel Aehnliches zu sagen, wie bei dem Chasles'schen Satze. Es haben innerhalb des zweifach ausgedehnten Systems die Lösungen im Allgemeinen die Maximalbeweglichkeit 2; nämlich immer dann, wenn das dreifach ausgedehnte System nicht ∞^2 oder das zweifach ausgedehnte nicht ∞^1 ausgeartete Curven der dritten Art enthält, und in noch zwei weiteren unschwer anzugebenden Fällen, wo diese Vorkommnisse wirklich zugleich auftreten. In den übrigen Fällen findet eine Verringerung der Beweglichkeit einzelner Lösungen von 2 auf 1 statt.*)

*) Eine Theorie, welche etwa zwei Systeme von Curven 2. *Ordnung* einander gegenüberstellte, und nun, ohne durch die Begriffe der „vollständigen Form" und der „wirklichen Lösung" hindurchzugehen, direct die Zahl der *beweglichen* Curven 2. O. anzugeben suchte, die beiden Systemen gemeinsam sind, dürfte nicht unterlassen, hervorzuheben, dass der Cremona'sche Satz da, wo er im Sinne einer solchen Theorie richtig ist (nämlich bei Ausschluss der im Texte angedeuteten Fälle), *nicht* schlechthin die Zahl der *beweglichen* Schnittcurven angiebt, sondern die Zahl derjenigen, welche die *Maximalbeweglichkeit* 2 haben. Denn es giebt noch (scheinbare) Lösungen, deren Beweglichkeit 1 ist, und die in der Cremona'schen Formel nicht mitgezählt sind.